Václav Skalický

O úrokování nepřetržitém

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 1, R1--R3

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121484

ROZHLEDY
MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÉ.

ROČNÍK 12. (1932/33). ČÍSLO 1.

O úrokování nepřetržitém.

Prof. *Václav Skalický.*

1. Známého základního vzorce pro složité úrokování

$$K_x = K_0 q^x = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x, \qquad (1)$$

podle něhož počítáme úlohy, týkající se vzrůstu kapitálu, můžeme použíti i v případě, že úrokování se děje v obdobích menších než je rok (pololetní, čtvrtletní, měsíční úrokování). Připisují-li se úroky v obdobích, jež jsou n-tou částí roku, pozmění se vzorec (1) na tento tvar

$$K_x = K_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nx}; \qquad (2)$$

to znamená: při výpočtu vezmeme procento n-krát menší a počet období n-násobný. Vzorec (2) vyjadřuje, nač vzroste uložená jistina K_0, je-li úrokována $p\%$ při úrokovacím období n-krát menším než jeden rok. Jak známo, je úrokování (při témže p) výhodnější tehdy, je-li období úrokovací kratší.

2. Uvažujme nyní, je-li možno úrokovací období učiniti kratším než libovolně malé číslo! Je zřejmo, že se tu jedná o existenci limity

$$\lim_{n \to \infty} K_x = \lim_{n \to \infty} K_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nx}. \qquad (3)$$

Limita tato vskutku existuje. Její odvození opírá se o vlastnosti přirozené funkce exponenciální o základu

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045\ldots \qquad (4)$$

Pro úplnost uveďme ještě rozvoj čísla e v nekonečnou řadu, který obdržíme, jestliže výraz (4) před limitováním rozvineme podle binomické poučky a pak limitujeme pro $n \to \infty$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \qquad (5)$$

Vraťme se nyní k limitě (3)!

$$\lim_{n\to\infty} K_x = K_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nx}$$

$$= K_0 \lim\left[\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{p}}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{px}{100}}, \tag{6}$$

z čehož dále, ježto $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'} = e$,

$$\lim K_x = K_0 e^{\frac{px}{100}}. \tag{7}$$

3. Takové úrokování, při němž úrokovací období je veličina nekonečně malá, nazveme nepřetržité. Obnos úrokovaný vzrůstá tu spojitě podle exponenciálního zákona. V dalším budeme stručně místo $\lim_{n\to\infty} K_x$ psáti K_x, což bude tedy v dalším znamenati úrokovaný obnos v čase x.

Ze základního vzorce plyne též vzorec pro diskont

$$K_0 = K_x e^{-\frac{px}{100}}. \tag{8}$$

Oba vzorce jsou zahrnuty v obecnějším

$$K_x = K_{x'}\, e^{\frac{p}{100}(x-x')}, \tag{9}$$

jenž vyplyne jednoduchou cestou ze základního a platí pro libovolné x, x'.

Další úlohy obrácené jsou výpočet doby a procenta.

$$x - x' = \frac{100}{p} \log\operatorname{nat} \frac{K_x}{K_{x'}}, \tag{10}$$

$$p = \frac{100}{x-x'} \log\operatorname{nat} \frac{K_x}{K_{x'}}. \tag{11}$$

4. Je zřejmé, že při praktickém užití uvedených vzorců nepůjde o úrokování v pravém slova smyslu. Po této stránce má úvaha význam pouze teoretický. Jsou však jiné předměty, pro něž se tato cesta výborně hodí. Tak můžeme vzorců užíti k přibližnému vyjádření zákona, podle něhož se mění počet obyvatelstva (určení % vzrůstu ze dvou hodnot pro počet obyvatelů).

Jiné příklady toho druhu skýtá fysika. Uvedeny budou aspoň dva.

a) Radioaktivní látky.

Radioaktivní záření má svůj původ v rozpadu atomů radioaktivní látky. Stupeň radioaktivity souvisí tedy se zákonem, podle něhož se řídí počet atomů v daném časovém intervalu se rozpadajících. Pokusně byl zjištěn pro aktivitu látky zákon

$$I_{x'} = I_x e^{-\lambda(x'-x)}, \tag{12}$$

podle něhož tedy ubývá aktivity určitého kvanta látky s časem podle exponenciálního zákona. Soudíme odtud, že počet atomů $n_{x'}$, dosud nerozpadlých z původního množství n_x, je vyjádřený vztahem

$$n_{x'} = n_x e^{-\lambda(x'-x)}. \tag{13}$$

Tento vztah je obdobný základnímu vzorci pro nepřetržité úrokování. λ nazývá se rozpadová konstanta radioaktivní látky a má tento význam: označíme-li procento úbytku atomů v jednotkové době p, je $\lambda = \frac{p}{100}$. Je to tedy zlomek, vyjadřující, jak velký díl původního počtu atomů se v jednotkové době rozpadne. Rozpadovou konstantu (a rozpadové procento) můžeme určiti z rovnice (12) zcela obdobně se vzorcem (11).

Velmi důležitou veličinou, charakterisující látku radioaktivní, je její poločas T, vyjadřující dobu, v níž klesne aktivita látky na polovinu. Je-li známa konstanta rozpadová (nebo příslušné %), můžeme užitím (10) odvoditi pro poločas vztah

$$T = \frac{100}{p} \cdot \log \text{nat} \frac{I_x}{I_{x'}} = \frac{100}{p} \log \text{nat}\, 2 = \frac{\log \text{nat}\, 2}{\lambda}. \tag{14}$$

Rozměr T v absolutních jednotkách je [sek], rozměr λ [sek^{-1}]. Velmi velký poločas má uran (řádu 10^{17} abs.), menší radium (10^{10} abs.), ještě menší radiová emanace (10^5 abs.). Obráceně je tomu ovšem s λ a p.*)

b) Závislost barometrického tlaku na výšce.

Učiníme-li předpoklad, že tlaku v ovzduší ubývá s výškou procentuálně rovnoměrně, pak lze psáti podle základního vzorce

$$\pi_{h'} = \pi_h \, e^{-\frac{p}{100}(h'-h)}, \tag{15}$$

kdež $\pi_{h'}$ a π_h značí tlaky ve výši h' a h.

Odtud:
$$h' - h = \frac{100}{p} \log \text{nat} \frac{\pi_h}{\pi_{h'}}. \tag{16}$$

Přejdeme-li k logaritmům dekadickým, jest

$$h' - h = \frac{100}{p \log e} \log \frac{\pi_h}{\pi_{h'}}. \tag{17}$$

Konstanta $\frac{100}{p \log e} = 18420$, měříme-li výšku v metrech.

*) Viz Valouch: Tabulky logaritmické, str. 150.