Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 1, R25--R28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121475

léhají elektrony na katodě potenciálnému rozdílu 1000.000 až 1200.000 voltů! Tímto číslem udána je také nejkratší délka vlny roentgenova záření, které z trubice vychází. Podle Einsteinova vztahu je součin napětí a elektronového náboje roven součinu Planckovy konstanty a kmitočtu způsobeného záření. Odtud vychází kmitočet 230 000 . 10^{15} sec^{-1} a odtud délka vlny 0,013 Å (Ångströmových jednotek), což je záření velmi pronikavé, neboť mu na jediný foton (nejmenší množství zářivé energie) připadá asi 1,6 miliontiny ergu! Nová trubice poskytuje účinek 20 roentgenových jednotek při vzdálenosti 70 cm ozářené plochy od zdroje záření. Jednotkou „roentgen" je míněno záření, které ionisuje 1 cm^3 vzduchu (při 0^0 a norm. tlaku) tak, že vzniká tak velká vodivost, při níž v nasyceném proudu nabývá elektrické množství hodnoty elektrostatické jednotky. K pohonu trubice sestaveny byly zvláštní transformátory, jež dodávají proud dostatečný pro světlo tří set sto-wattových lamp.

Úlohy.

Z matematiky.

1. Dvě strany kosočtverce leží na přímkách m, n a elipsa jemu opsaná prochází bodem A. Sestrojte jej! Dr. *Jar. Bílek.*

2. Jest sečísti n členů řady:

$$4,\ 44,\ 444, \ldots$$

Prof. *Jos. Dvořák* (Písek).

3. Do plochy společné parabolám $x^2 = p^2 + 2py$, $x^2 = p^2 - 2py$ jest vepsati elipsu maximálního obsahu. *Týž.*

4. Dána parabola $x^2 = 2py$; určiti geom. místo ohnisek parabol, které s danou mají v počátku tři soumezné body společné. RNC. *Bed. Havelka.*

5. Je-li ve čtyřúhelníku dvojstředovém m vzdálenost středu kružnice vepsané od středu kružnice opsané, ϱ, r jejich poloměry, pak platí:

$$2\varrho^2 (r^2 + m^2) = (r^2 - m^2)^2.$$

Dr. *Karel Hruša.*

6. Jsou-li φ a ψ úhly, které svírají průvodiče libovolného bodu elipsy s její velkou osou, platí vztah: $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$, kde ε je číselná výstřednost. Prof. *V. Charfreitag.*

7. Je-li p prvočíslo, k libovolné kladné a celé číslo, menší než p, potom výraz:

$$1 + (-1)^{k-1} . (k-1)!\,(p-k)!$$

jest dělitelný číslem p. Dr. *Karel Koutský.*

8. Dvojstředovému čtyřúhelníku jest vepsána kružnice. Mezi spojnicemi d_1, d_2 dotyčných bodů na protilehlých stranách platí vztahy:

$$\frac{d_1^2 + d_2^2}{4} = 2\varrho^2 - u^2, \qquad \frac{d_1^2 - d_2^2}{4} = u^2 \cos 2\omega,$$

kde ϱ je poloměr kružnice vepsané, u vzdálenost jejího středu od průsečíku úhlopříček a ω úhel, který tato vzdálenost svírá s jednou spojnicí dotyčných bodů na protilehlých stranách. *Týž.*

9. Sestrojiti elipsu neb hyperbolu o minimální velké ose, jsou-li dány tečny t_1, t_2 a střed křivky. *Karel Lerl.*

10. Poloměry kružnic trojúhelníku připsaných jsou kořeny rovnice

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0.$$

Vyjádřiti poloměr kružnice vepsané a opsané koeficienty této rovnice. *Týž.*

11. Určiti v rovnici

$$x^4 - (3\lambda + 2)\, x^2 + \lambda^2 = 0$$

λ tak, aby její kořeny tvořily aritmetickou řadu. *Zdeněk Pírko.*

12. Zavěsíme-li klenec, jehož povrch je 144 a objem $18\sqrt{39}$, v jednom vrcholu, jaké jsou odchylky hran a stěn od niti? *Stan. Plicka.*

13. Vrcholem rovnostranného trojúhelníka vésti kružnici protínající strany ve 4 vrcholech lichoběžníka, jehož obsah je dán. (Na př. $0 = \frac{2}{9}\Delta$). Dr. *Roháček.*

14. Určete geom. místa ohnisek parabol, daných vrcholem $V(0, 0)$ a:

1. bodem A, nebo
2. tečnou t, nebo
3. normálou n. Prof. *Ota Setzer.*

15. Sečtěte výraz:

$$s_{n,x} = \binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-3}{n-2} x + \binom{2n-4}{n-3} x^2 + \ldots + \binom{n}{1} x^{n-2} + \binom{n-1}{0} x^{n-1}, \text{ pro } x = 0, 1, 2.$$

Prof. *J. Široký.*

16. Řešte soustavu:

$$4x^2 + 8yz = 1,$$
$$4y^2 + 8xz = -23,$$
$$2z^2 + 4xy = 11.$$

Václav Veselý.

17. Udejte různé konstrukce pravoúhlého trojúhelníka, dány-li rozdíly $c - a$, $c - b$. *F. Vyčichlo.*

18. Odvoďte *planimetricky* vzorec pro obsah čtyřúhelníka tětivového. Dr. *A. Zahrádka.*

19. Má se stanoviti hodnota součtu:

$$S = 1^2 (2n - 1) + 3^2 (2n - 3) + 5^2 (2n - 5) + \ldots + \\ + (2n - 5)^2 . 5 + (2n - 3)^2 . 3 + (2n - 1)^2 . 1.$$

Z. š. i. *A. Ždímal.*

20. Určiti trojúhelníky, jejichž strany jsou celistvé, o jednotku rozdílné a výšky racionální. Řed. *Al. Zdrahal.*

Z fysiky.

1. Vypočtěte průměr drátu z plávkové ocele, který by při napětí rovném mezi pružností v tahu udržel Měsíc při Zemi, kdyby přestala působiti jejich vzájemná přitažlivost! Kolik km se tímto drátem připoutaný Měsíc vzdálí od Země? Prof. *Frant. Dvořák.*

2. Skleněná koule postupuje rovnoměrně rychlostí c_1 ve směru A_1 a stejně hmotná koule olověná rychlostí c_2 ve směru A_2; v okamžiku, kdy se setkají, svírají směry A_1 a A_2 se střednou úhly α_1 a α_2. Určiti rychlosti a úhel jejich směrů pohybu po rázu. [Koeficienty restituce*) $k_1 = 0{,}94$, $k_2 = 0{,}20$; $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $\alpha_1 = 30^0$, $\alpha_2 = 60^0$]. *Bedřich Havelka.*

3. Na vnější straně elipsy $\left(a = \frac{5}{4}, b = \frac{5\sqrt{14}}{32}\right)$, jejíž hlavní osa je vertikální, padá s vrcholu bez tření hmotný bod; v kterém místě opustí elipsu? *Týž.*

4. Těleso taženo je po horizontální rovině silou, odchýlenou od ní o úhel α směrem vzhůru. Při kterém úhlu α bude tato síla nejmenší, předpokládáme-li jenom tření vlečné, jehož koeficient f je dán? Prof. *V. Charfreitag.*

5. Z určitého bodu vrženy jsou současně všemi směry stejnou rychlostí hmotné body; kde se nalézají po určité době?

Prof. *Jaroslav Krejzlík.*

6. Naléváme-li do válcovité nádoby, jejíž váha je p, vnitřní poloměr r a těžiště je o d vzdáleno od dna, kapalinu o spec. váze s, klesá nejprve společné těžiště a teprve později stoupá. Určiti jeho nejnižší polohu. *Týž.*

7. Jak musí býti sestaveno n galvanických článků v baterii, aby při daném vnějším odporu R_e dávala proud největší intensity?

Zdeněk Pírko.

8. Určete krivku, po ktorej sa bude pohybovať loďka hmoty M a dĺžky $2a$, hnaná priamo rýchlosťou v, ak jej kormidlo plochy F so stredom O, vo vzdialenosti b od konca loďky, postavíme kolmo na os loďky. *Jozef Skotnický.*

9. Spustíme-li s určité výše pružný míč na horizontální rovinu, odrazí se pouze do $^3/_4$ původní výše. Jak daleko dopadne

*) Viz Rozhledy roč. III str. 69.

(po řadě odrazů) od místa prvního nárazu, hodíme-li jím na touž rovinu rychlostí c pod úhlem α? *Prof. Josef Široký.*

10. Na hranol pravoúhlý s úhlem 45^0 dopadá paprsek světelný na stěnu odvěsny a po dvou vnitřních odrazech na druhé odvěsně a přeponě vychází z hranolu. Jaká jest jeho odchylka od původního směru? *Zahradníček.*

Z deskriptivní geometrie.

1. Dány jsou 4 trojiny bodů $A_iB_iC_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ a bod M. Jest sestrojiti 4 kulové plochy k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, aby každá z nich procházela jednou trojinou bodů tak, aby bod M byl jejich potenčním bodem. *Karel Lerl.*

2. Sestrojiti rotační plochu kuželovou, dán-li bod B osy, povrchová přímka p a body M, N vepsané kul. plochy. *Ota Setzer.*

3. Sestrojte plochu kulovou, která prochází danými body A, B a dotýká se dané kul. plochy K, je-li bod R ve společné tečné rovině obou kul. ploch. *Boh. Starosta.*

4. Na plášti šikmého válce, s kruhovou podstavou v dané rovině ϱ, jsou dány body M, N antiparalelního řezu, který se dotýká podstavy. Je-li dále τ tečná rovina plochy, jest tuto plochu sestrojiti. *Týž.*

5. Sestrojiti plochu kulovou, kterou vidíme z bodů O_1, O_2, O_3, O_4 v úhlech resp.: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. *F. Vyčichlo.*

Vypsání cen za řešení úloh.

Studujícím středních škol, kteří jsou odběrateli „Rozhledů", budou uděleny ceny za správné řešení úloh z matematiky, fysiky a desktiptivní geometrie, a to knihy vydané nákladem Jednoty. Kromě toho z fondu Jaromíra Mareše obdrží letos už po třinácté ceny studující středních škol za nejlepší řešení úloh; při stejné jakosti řešení náleží přednost řešitelům z české reálky a českého gymnasia v Českých Budějovicích a z české reálky v Praze III. Dále obdrží odměnu nejlepší počtář z české školy obecné v Českých Budějovicích v Dlouhé ulici.

Řešení úloh, psané na čtvrtkách po jedné straně, každá úloha na zvláštním listě, buďte zaslána redakci do **15. března 1933** neodvolatelně. Úprava buď tato: Číslo úlohy, znění její a autor. Řešil p. (jméno, ústav). Řešení. Úplná adresa bytu. Vzory najde čtenář v posledním čísle minulého ročníku. Buď přiložen pro kontrolu seznam řešených úloh s podpisem a adresou. Zásilky nedostatečně frankované se nepřijímají.

Na řešení pozdě došlá není možno bráti zřetel.

Poznámka. Autorem fysikálních úloh v roč. 10 a 11, označených R, je prof. dr. Jan Schuster.