Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

O jisté vlastnosti rovnoosé hyperboly

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 3, 343--345

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121472

Nazveme $\varphi_1(r, z)$ $\varphi_2(r, z)$ konjugovanými funkcemi zonálními. Utvoříme součet

$$\varphi_1(r, z) + i\varphi_2(r, z) = \int_0^{2\pi} F(r \sin \vartheta + iz)\, d\vartheta \ldots, \tag{7}$$

kdež

$$i = \sqrt{-1}$$

a

$$F(x + iy) = \Phi_1(x, y) + i\Phi_2(x, y) \ldots \tag{8}$$

Vzorec (7) pro funkce zonální jest analogon vzorce (8) platícího pro rovinné funkce harmonické.

O jisté vlastnosti rovnoosé hyperboly.

Dr. **Ant. Pleskot**, c. k. professor v Plzni.

Na rovnoosé hyperbole buďtež dány tři libovolné body A, B, C, jakožto vrcholy trojúhelníka; zvolme na téže křivce libovolný bod O a stanovme spojnice OA, OB, OC. Vedeme-li nyní dalším libovolným bodem S hyperboly kolmice na paprsky OA, OB, OC, pak tyto kolmice protínají strany trojúhelníka BC, AC, AB v bodech, jež leží v přímce.

Věta tato plyne, jakožto zvláštní případ obecné věty, kterou jsem v tomto časopise (R. 32. str. 278.) uveřejnil a jež zní:

Je-li trojúhelník ABC vepsán kuželosečce a dána-li libovolná přímka m a na ní dvě řady projektivní, jichž dvojné body jsou průsečíky přímky m s kuželosečkou a patří-li k průsečíkům stran BC, AC, AB, s přímkou m jakožto bodům jedné řady, projektivně body a, b, c v řadě druhé, tu spojnice libovolného bodu S kuželosečky s body a, b, c protínají strany BC, CA, AB v bodech α, β, γ, jež leží na přímce.

Dříve nežli větu tuto budeme applikovati, uveďme ještě tuto poznámku samozřejmou.

Budiž S vrcholem dvou involučních svazků $S(a, b, c, \ldots)$ a $S(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ a v nich n a n_1 dva paprsky sobě odpovídající navzájem kolmé.

Jestli v jednom z těchto svazků ku př. ve svazku S (a, b, c, . .) ku každému paprsku a, b, c, . . . přidružíme paprsky a_2, b_2, c_2 . . ., jež stojí kolmo na paprsky a_1, b_1, c_1, . . ., tu obdržíme nový svazek S (a_2, b_2, c_2, . . .) a svazky

$$S\ (a,\ b,\ c,\ .\ .\ .)\ \text{a}\ S\ (a_2, b_2, c_2\ .\ .\ .)$$

jsou projektivní a dvojné paprsky těchto svazků jsou paprsky n a n_1.

Důkaz věty o hyperbole jest tento:

V čtyrúhelníku $OABC$ paprsky OA a BC, OB a AC, OC a AB tvoří na nekonečně vzdálené přímce involuci a paprsky navzájem kolmé, které v této involuci k sobě patří, stanoví směry asymptot hyperboly rovnostranné, která prochází body O, A, B, C.

Vedeme-li bodem O paprsky OA_1, OB_1, OC_1 rovnoběžné ku přímkám BC, CA, AB a dále paprsky OA_2, OB_2, OC_2 kolmé ku paprskům OA, OB, OC, pak následuje z poznámky nahoře uvedené, že dvojné paprsky projektivních svazků

$$O\ (A_2,\ B_2,\ C_2,\ .\ .\ .)\ \text{a}\ O\ (A_1,\ B_1,\ C_1,\ .\ .\ .)$$

stanoví směry asymptot hyperboly; svazky tyto stanoví tedy na nekonečně vzdálené přímce dvě řady projektivní a dvojné body těchto řad jsou průsečíky úběžné přímky s hyperbolou. Applikujeme-li tedy větu obecnou ze začátku uvedenou, máme theorém o hyperbole dokázaný.

Theorém tento řeší úlohu:

Jest dán v rovině trojúhelníka ABC bod O; jest nalézti geometrické místo bodu S tak, aby kolmice, z bodu S na oA, oB, OC vedené, protínaly strany BC, CA, AB v bodech α, β, γ, jež by ležely v přímce. Geometrickým místem bodů S jest tedy rovnoosá hyperbola jdoucí body A, B, C, O.

Ku konci uveďme ještě jednoduchou applikaci věty hořejší. Uvážíme-li známou větu, že rovnoosá hyperbola, jdoucí vrcholy trojúhelníka, prochází též průsečíkem jeho výšek, tu obdržíme větu tuto:

Spustíme-li s průsečíku výšek trojúhelníka kolmice na spojnice vrcholů jeho s libovolným bodem roviny, pak průsečíky těchto kolmic s příslušnými stranami leží na téže přímce. Necháme-li bod S splynouti s bodem O, tu obdržíme větu:

Spojíme-li libovolný bod S v rovině trojúhelníka s jeho vrcholy a vztyčíme-li v bodě tom kolmice na spojnice, pak protínají tyto příslušné strany v bodech, jež leží v přímce.

Sestrojení společných bodů dvou kuželoseček majících hlavní osy na téže přímce.

Napsal **Jan Melichar**, professor v Kroměříži.

Dvě kuželosečky, jejichž hlavní osy leží na téže přímce — nazveme ji X — protínají se ve čtyřech bodech tvořících dva páry bodů souměrně položených ku přímce X; spojnice těchto bodů jsou pak vždy dvě přímky reálné, ať už všechny čtyři body jsou reálné či imaginárné aneb dva reálné a dva imaginárné. Při sestrojení průsečných bodů obou kuželoseček jde tudíž napřed o tyto dvě spojnice resp. jejich body na přímce X, což jest úlohou 2. st., již lze řešiti pravítkem a kružítkem.

Je-li jednou z kuželoseček kružnice, lze vésti snadno kuželosečkou rotační plochu kuželovou (nebo válcovou) a kružnicí plochu kulovou o středu na ose prvé pomocné plochy, takže průsekem obou ploch pomocných jsou dvě kružnice, jejichž roviny protínají rovinu daných kuželoseček v hledaných spojnicích. (Niemtschik, Konstruktionen der Durchschnitte von Kreisen und Kegelschnitte, Sitzungsbericht der kais. Akademie in Wien 1869.)

Případ tento nelze řešiti methodou pro případy obecné, jež právě tu bude podána.

Mají-li dvě kuželosečky v rovině π hlavní osy na přímce X, veďme jednou z nich libovolnou pomocnou rotační plochu kuželovou (nebo válcovou) a druhou pak podobně plochu o ose rovnoběžné s osou první plochy, což lze obecně vždy učiniti při vhodné volbě první pomocné plochy. Obě plochy protínají se navzájem v křivce, jejíž průmět do roviny ν jdoucí přímkou