Miloš Kössler

O zonální funkci harmonické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 3, 337–343

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121471

O zonální funkci harmonické.

Napsal **M. Kössler.**

§ 1. Zonální funkce harmonická hoví rovnici

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0. \tag{1}$$

A. Budiž $\varphi(r, z)$ řešením této rovnice toho druhu, že integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(r \sin\vartheta, z)\sin\vartheta d\vartheta$$

má význam pro určitý obor veličin r, z.

Dokážeme, že výraz

$$\Phi(r, z)=r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(r \sin\vartheta, z)\sin\vartheta d\vartheta \tag{1a}$$

splňuje rovnici Laplaceovu:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \tag{2}$$

---

nimi n body samodružnými. Každá tato homologie je mimo to určena dvěma body sdruženými, jež takto nalezneme: Přímkou O_1A a body $O_2O_3\ldots O_{n-1}$ položíme prostor $(n-1)$-rozměrný, rovněž přímkou O_nA' a body $O_2O_3\ldots O_{n-}$; oba tyto prostory protnou se v prostoru $(n-2)$-rozměrném, který vytkne na uvedených dvou přímkách body A_1 a A'_1. Dvojice AA_1 a A'_1A' zvolíme za dvojice bodů korrespondujících v homologii první H_1 a poslední H_n. Podobně určíme dvojice v H_2 a H_{n-1} na základě bodů A_1, A'_1 a $n-2$ bodů samodružných $O_2O_3\ldots O_{n-1}$; atd. Na konec zbudou buď tři body samodružné a body $A_{\frac{1}{2}(n-3)}$, $A'_{\frac{1}{2}(n-3)}$ v prostoru trojrozměrném (je-li n liché) nebo dva body samodružné a body $A_{\frac{1}{2}n-1}$, $A'_{\frac{1}{2}n-1}$ v rovině (je-li n sudé). V prvním případě protneme dvě přímky určené obdobně jako prve přímkou vedenou třetím bodem samodružným a dostaneme poslední dva body $A_{\frac{1}{2}(n-1)}$, $A'_{\frac{1}{2}(n-1)}$; v druhém případě protínají se obě spojnice bodů samodružných s body uvedenými v $A_{\frac{1}{2}n}$. Dostaneme tak střední tři resp. dvě homologie.

Z toho pak vyplyne, že všechna řešení rovnice (1), *splňující podmínku A, dají se vyjádřiti integrálem:*

$$\varphi(r, z) = \int_0^{\pi} \Phi_1 (r \sin \vartheta, z)\, d\vartheta, \tag{3}$$

kdež $\Phi_1 (r, z)$ splňuje rovnici (2).

Derivací rovnice (1a) obdržíme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(r \sin \vartheta, z) \sin \vartheta d\vartheta + r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi (r \sin \vartheta, z)}{\partial (r \sin \vartheta)} \sin^2 \vartheta d\vartheta$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi (r \sin \vartheta, z)}{\partial (r \sin \vartheta)} \sin^2 \vartheta d\vartheta + r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 \varphi (r \sin \vartheta, z)}{\partial (r \sin \vartheta)^2} \sin^3 \vartheta d\vartheta$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 \varphi (r \sin \vartheta, z)}{\partial z^2} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Integrujeme per partes výraz

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\partial \varphi (r \sin \vartheta, z)}{\partial (r \sin \vartheta)} \sin \vartheta \right] \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$- \Big/_{\vartheta = 0}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\ \Big] \cos \vartheta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{\partial \varphi (r \sin \vartheta, z)}{\partial (r \sin \vartheta)} \sin \vartheta \right] d\vartheta.$$

První sčítanec pravé strany jest roven nule, a tak obdržíme na pravé straně

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \frac{\partial \varphi (r \sin \vartheta, z)}{\partial (r \sin \vartheta)} d\vartheta + r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \frac{\partial^2 \varphi (r \sin \vartheta, z)}{\partial (r \sin \vartheta)^2} d\vartheta.$$

Dosazením $cos^2\,\vartheta = 1 - sin^2\,\vartheta$ vyjde vzorec:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi\,(r\,sin\,\vartheta,\,z)}{\partial\,(r\,sin\,\vartheta)}\,sin^2\,\vartheta d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi\,(r\,sin\,\vartheta,\,z)}{\partial\,(r\,sin\,\vartheta)}\,d\vartheta$$

$$+\,r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\,(r\,sin\,\vartheta)^2}\,d\vartheta - r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\,(r\,sin\,\vartheta)^2}\,sin^3\,\vartheta d\vartheta.$$

Tím redukuje se druhá derivace Φ podle r^2 na tvar

$$\frac{\partial^2\Phi\,(r,\,z)}{\partial r^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi\,(r\,sin\,\vartheta,\,z)}{\partial\,(r\,sin\,\vartheta)}$$

$$+\,r\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,\vartheta\,\frac{\partial^2\varphi\,(r\,sin\,\vartheta,\,z)}{\partial\,(r\,sin\,\vartheta)^2}\,d\vartheta,$$

a tedy

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \left[\varrho\,\frac{\partial^2\varphi\,(\varrho,\,z)}{\partial\varrho^2} + \varrho\,\frac{\partial^2\varphi\,(\varrho,\,z)}{\partial z^2} + \frac{\partial\varphi\,(\varrho,\,z)}{\partial\varrho}\right].$$

Integrand pravé strany jest však roven identicky nulle, ježto $\varphi\,(\varrho,\,z)$ splňuje rovnici (1). $\Phi\,(r,\,z)$ splňuje tedy rovnici (2).

Při výpočtu užili jsme na integrál (1*a*) integrace per partes a derivace za integračním znaménkem. Tím omezují se naše vývody na ony funkce $\varphi\,(r,\,z)$, pro něž operace uvedené jsou dovoleny.

K důkazu rovnice (3), podávající obecný tvar řešení rovnice (1), užijeme vzorců Beltrami-ho z roku 1880*). Vzorce ty jsou:

$$\int_0^{\pi} \varphi\,(r\,sin\,\vartheta)\,d\vartheta = \psi\,(r) \qquad (a)$$

$$\int_0^{r} \varphi\,(r)\,dr = \frac{r}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi\,(r\,sin\,\varphi)\,sin\,\vartheta d\vartheta. \qquad (b)$$

*) Annali di matem. Ser. II. Tom. XXV.

Rovnice (a), (b) jsou equivalentní. Jedna dá se z druhé odvoditi užitím formule Dirichletovy pro dvojitý integrál.

Zavedeme-li novou funkci rovnicí

$$\int_0^r \varphi(r)\, dr = f(r)\,^{*}),$$

změní se tvar rovnic (a), (b) následovně

$$\left.\begin{aligned} \psi(r) &= \int_0^\pi \frac{\partial f(r \sin \vartheta)}{\partial (r \sin \vartheta)}\, d\vartheta \\ f(r) &= \frac{r}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(r \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Applikujeme-li tyto formule na (1a), dostaneme

$$\varphi(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \Phi(r \sin \vartheta, z)}{\partial (r \sin \vartheta)}\, d\vartheta.$$

Položíme-li

$$\frac{1}{\pi} \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} = \Phi_1(r, z),$$

zjednoduší se výsledek.

$$\varphi(r, z) = \int_0^\pi \Phi_1(r \sin \vartheta, z)\, d\vartheta.$$

Funkce $\Phi_1(r, z)$ splňuje patrně rovnici (2). Tím jest dokázána věta (3).

Ke každé zonální funkci harmonické přísluší jiná funkce harmonická splňující rovnici (2). Tato poslední funkce, označovaná znakem $\Phi_1(r, z)$, není libovolná. Musí býti předně splněna podmínka $f(0) = 0$ z formule (4), to jest $[\Phi_1(r, z)]_{r=0} = 0$ a za druhé musí býti také

$$\left[\frac{\partial \Phi_1(r, z)}{\partial r}\right]_{r=0} = 0$$

*) Patrně jest $f(0) = 0$.

v tom případu, když žádáme, aby $\varphi(r, z)$ bylo regulérní na ose symmetrie, to jest, aby

$$\left[\frac{\partial \varphi(r, z)}{\partial r}\right]_{r=0} = 0.$$

Jsou-li tyto podmínky splněny, hoví výraz (3) rovnici (1), o čemž se můžeme přesvědčiti dosazením.

Harmonická funkce $\Phi_1(r, z)$ jest tedy vázaná jistými podmínkami.

Postupem analogickým tomu, kterého jsme dosud užili, přesvědčíme se, že rovnice (1) má také řešení tvaru

$$\varphi(r, z) = \int_{\pi}^{2\pi} \Phi_1(r \sin \vartheta, z)\, d\vartheta,$$

kdež funkce $\Phi_1(r, z)$ hoví podobným podmínkám jako shora.

Z rovnice této a řešení (3) usuzujeme:

$$\varphi(r, z) = \int_{0}^{2\pi} \Phi_1(r \sin \vartheta, z)\, d\vartheta, \tag{5}$$

jest řešením rovnice (1), kdež $\Phi_1(r, z)$ hoví rovnici (2) a jest toho druhu, že integrál (5) má význam a že jest dovolena dvojí derivace za integračním znamením podle r i podle z. Jiné podmínky funkce tato splňovati nemusí.

Verifikaci provedeme dosazením (5) do rovnice (1). Na levé straně nám vyjde, užijeme-li vzorce

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi_1(r \sin \vartheta, z)}{\partial (r \sin \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta = r \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \frac{\partial^2 \Phi_1(r \sin \vartheta, z)}{\partial (r \sin \vartheta)^2},$$

integrál

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2 \Phi_1(\varrho, z)}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1(\varrho, z)}{\partial z^2}\right] d\vartheta,$$

kdež $\varrho = r \sin \vartheta$.

A tedy splňuje-li Φ_1 rovnici (2), splňuje $\varphi(r, z)$, dané výrazem (5), rovnici 1.

Rovnice (1a), (3), (5) určují vztahy mezi harmonickou funkcí zonální a jinou harmonickou funkcí, hovící rovnici (2), které dají se stručně shrnouti takto:

Ke každé harmonické funkci zonální přísluší jistá funkce harmonická v rovině určená rovnicí (1a) *a obráceně ke každé dvojrozměrné funkci harmonické přísluší určitá funkce zonální, daná vzorcem* (5).

§ 2. Vzorce (3) a (5) dá se užíti k řešení obecnějšího problému Dirichletova a řady jiných úloh z oboru funkcí zonálních.

Problémy ty vedou k novému typu rovnic integrálních, tvaru

$$\int_a^b f(g(x, s))\, ds = F(x), \tag{6}$$

kdež $g(x, s)$, $F(x)$ jsou funkce dané, a, b *konstanty* a $f(u)$ jest funkce hledaná.

Pišme rovnici (5) ve tvaru

$$\varphi_1(r, z) = \int_0^{2\pi} \Phi_1(r \sin \vartheta, z)\, d\vartheta.$$

K harmonické funkci $\Phi_1(r, z)$ najdeme funkci konjugovanou $\Phi_2(r, z)$, která splňuje podmínky

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}.$$

Integrál

$$\varphi_2(r, z) = \int_0^{2\pi} \Phi_2(r \sin \vartheta, z)\, d\vartheta$$

jest rovněž řešením rovnice (1).

Nazveme $\varphi_1(r, z)\ \varphi_2(r, z)$ konjugovanými funkcemi zonálními. Utvoříme součet

$$\varphi_1(r, z) + i\varphi_2(r, z) = \int_0^{2\pi} F(r \sin \vartheta + iz)\, d\vartheta \ldots, \tag{7}$$

kdež

$$i = \sqrt{-1}$$

a

$$F(x + iy) = \Phi_1(x, y) + i\Phi_2(x, y) \ldots \tag{8}$$

Vzorec (7) pro funkce zonální jest analogon vzorce (8) platícího pro rovinné funkce harmonické.

O jisté vlastnosti rovnoosé hyperboly.

Dr. **Ant. Pleskot**, c. k. professor v Plzni.

Na rovnoosé hyperbole buďtež dány tři libovolné body A, B, C, jakožto vrcholy trojúhelníka; zvolme na téže křivce libovolný bod O a stanovme spojnice OA, OB, OC. Vedeme-li nyní dalším libovolným bodem S hyperboly kolmice na paprsky OA, OB, OC, pak tyto kolmice protínají strany trojúhelníka BC, AC, AB v bodech, jež leží v přímce.

Věta tato plyne, jakožto zvláštní případ obecné věty, kterou jsem v tomto časopise (R. 32. str. 278.) uveřejnil a jež zní:

Je-li trojúhelník ABC vepsán kuželosečce a dána-li libovolná přímka m a na ní dvě řady projektivní, jichž dvojné body jsou průsečíky přímky m s kuželosečkou a patří-li k průsečíkům stran BC, AC, AB, s přímkou m jakožto bodům jedné řady, projektivně body a, b, c v řadě druhé, tu spojnice libovolného bodu S kuželosečky s body a, b, c protínají strany BC, CA, AB v bodech α, β, γ, jež leží na přímce.

Dříve nežli větu tuto budeme applikovati, uveďme ještě tuto poznámku samozřejmou.

Budiž S vrcholem dvou involučních svazků $S(a, b, c, \ldots)$ a $S(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ a v nich n a n_1 dva paprsky sobě odpovídající navzájem kolmé.