Karel Petr
O sčítání řad numerických. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 3, 353--369

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121465

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O sčítání řad numerických.

Pro studující napsal K. Petr.

I.

1. Při sčítání řad numerických nekonečných hlavně běží o to, udati methody, které nám dovolují součet té řady v tom případě, že řady málo konvergují, vypočísti, aniž by bylo nutno sčítati veliký počet členů a prováděti obsáhlé poměrně výpočty. Mají-li ovšem takové methody býti možny, jest třeba, aby členy řady byly tvořeny dle jistého zákona nám známého.

Ku př. řada

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^k}{2k+1}+\ldots \tag{1}$$

jest řada konvergentní, její součet jest $\frac{\pi}{4}$.

Jest snadno dokázati, že součet prvých m členů této řady liší se co do absolutní hodnoty od součtu celé řady, t. j. od $\frac{\pi}{4}$ o méně než $\frac{1}{2m+1}$, takže kdybychom jenom na základě této okolnosti nám známé chtěli pomocí dané řady vypočísti $\frac{\pi}{4}$ s chybou menší než $1 \,.\, 10^{-6}$, musili bychom sečísti 500000 členů dané řady, což by při praktickém provádění poskytovalo obrovské potíže.

Uvedená řada spadá jako zvláštní případ do řad tvaru

$$\varphi(0) + a\varphi(1) + a^2\varphi(2) + \ldots + a^k\varphi(k) + \ldots, \tag{2}$$

kde $\varphi(x)$ jest racionálná funkce proměnné x, t. j. kde

$$\varphi(x) = \frac{b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_n}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}.$$

V řadě dané jest

$$a = -1, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2x+1}.$$

Místo řady (2) můžeme bráti v úvahu řadu

$$\left(\varphi(0) + \frac{P(0)}{Q(0)} - a\frac{P(1)}{Q(1)}\right) + a\left(\varphi(1) + \frac{P(1)}{Q(1)} - a\frac{P(2)}{Q(2)}\right) + a^2\left(\varphi(2) + \frac{P(2)}{Q(2)} - a\frac{P(3)}{Q(3)}\right) + \ldots \tag{3}$$

$P(x)$, $Q(x)$ nechť jsou mnohočleny v x.

Blíží-li se výraz $a^n \frac{P(n)}{Q(n)}$ s rostoucím n libovolně blízko k nulle, jakož chceme předpokládati, jest mezi součtem S_1 řady (3) a součtem S řady (2), jakož na prvý pohled patrno, vztah

$$S = S_1 - \frac{P(0)}{Q(0)}.$$

Mnohočleny $P(x)$, $Q(x)$ lze však vždy tak voliti, aby řada (3) mnohem rychleji konvergovala než řada (2), jakož podrobně na příkladech bude vyloženo.

Sčítání řady (3) jest zcela pohodlné, neboť součet $(n+1)$ prvých členů řady (3) zmenšený o $\frac{P(0)}{Q(0)}$ jest patrně

$$\varphi(0) + a\varphi(1) + a^2\varphi(2) + \ldots + a^n\varphi(n) - a^{n+1}\frac{P(n+1)}{Q(n+1)}; \tag{4}$$

výraz tento neposkytuje pro výpočet mnohem větší obtíže než součet prvých ($n+1$)-členů řady (2), od něhož se jenom v posledním členu liší. Naproti tomu hodnota toho výrazu s rostoucím n při vhodné volbě mnohočlenů P, Q mnohem lépe vystihuje součet řady (2) než součet n prvých členů řady (2)*).

Výraz (3) předpokládá, že polynom $Q(x)$ pro žádnou celistvou kladnou hodnotu čísla x není rovný nulle; kdyby ku př. $Q(x)=0$ pro $x=4$ a už pro žádné jiné kladné celé x, mohli bychom transformaci řady (2) ve (3) naznačenou prováděti teprve od 5. členu počínajíce; výsledek (4) by však i tu zůstával v platnosti pro $n \geqq 5$. Obraťme se ku příkladům, abychom to, co v předcházejícím uvedeno, podrobně tu objasnili a provedli.

2. Budiž dáno za úkol odvoditi pro součet řady (1) řadu rychleji konvergující. Zavedeme tedy místo řady (1) řadu

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{1}+\frac{P_\varrho(1)}{Q_\varrho(1)}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{P_\varrho(1)}{Q_\varrho(1)}+\frac{P_\varrho(2)}{Q_\varrho(2)}\right)+\\ \left(\frac{1}{5}+\frac{P_\varrho(2)}{Q_\varrho(2)}+\frac{P_\varrho(3)}{Q_\varrho(3)}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{P_\varrho(3)}{Q_\varrho(3)}+\frac{P_\varrho(4)}{Q_\varrho(4)}\right)+\ldots\end{gathered} \tag{5}$$

Obecný člen této řady jest (nehledíme-li k prvnímu členu)

$$(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{P_\varrho(n)}{Q_\varrho(n)}+\frac{P_\varrho(n+1)}{Q_\varrho(n+1)}\right).$$

Při tom nechť jest $Q_\varrho(x)$ mnohočlen v x stupně ϱ, $P_\varrho(x)$ pak mnohočlen stupně nejvýše $\varrho-1$. Součinitele v těchto mnohočlenech při různých mocninách x volíme tak, aby

$$\frac{1}{2x+1}+\frac{P_\varrho(x)}{Q_\varrho(x)}+\frac{P_\varrho(x+1)}{Q_\varrho(x+1)}=\frac{\mathsf{A}_\varrho}{(2x+1)\,Q_\varrho(x)\,Q_\varrho(x+1)}, \tag{6}$$

kde A_ϱ jest číslo na x nezávislé; že takováto volba jest vždy (pro každé ϱ) možna, dokážeme výpočtem těch polynomů. Řada (5) při té volbě změní se na řadu tím rychleji konvergující, čím větší jest ϱ; jelikož členy její mají znaménka střídavá,

*) Tuto methodu lze v podstatě pokládati jako specielní případ methody *Kummerovy*.

udává součet prvých ($n+1$)-členů, kterýž lze psáti ve tvaru

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots \quad +\frac{(-1)^n}{2n+1}+(-1)^n \frac{P_\varrho(n+1)}{Q_\varrho(n+1)} \tag{7}$$

číslo $\frac{\pi}{4}$ s chybou menší, než jest člen $n+2$-hý, t. j. menší co do absolutní hodnoty než výraz

$$(-1)^{n+1} \frac{\mathsf{A}_\varrho}{(2n+3)\, Q_\varrho(n+1)\, Q_\varrho(n+2)}.$$

Přistupme ku výpočtu mnohočlenů P_ϱ, Q_ϱ. Píšeme-li v (6) $x-1$ místo x, dostáváme rovnici

$$\frac{1}{2x-1}+\frac{P_\varrho(x-1)}{Q_\varrho(x-1)}+\frac{P_\varrho(x)}{Q_\varrho(x)}=\frac{\mathsf{A}_\varrho}{(2x-1)\, Q_\varrho(x-1)\, Q_\varrho(x)}. \tag{8}$$

Z (6) a (8) jest patrno, že, uvedeme-li rozdíl

$$\frac{\mathsf{A}_\varrho}{(2x-1)\, Q_\varrho(x-1)\, Q_\varrho(x)}-\frac{\mathsf{A}_\varrho}{(2x+1)\, Q_\varrho(x)\, Q_\varrho(x+1)}=$$

$$\mathsf{A}_\varrho \frac{(2x+1)\, Q_\varrho(x+1)-(2x-1)\, Q_\varrho(x-1)}{(2x-1)(2x+1)\, Q_\varrho(x-1)\, Q_\varrho(x)\, Q_\varrho(x+1)}$$

na společný jmenovatel, příslušný čitatel jest dělitelný $Q_\varrho(x)$. Čitatel však jest stupně ϱ, neboť člen s $x^{\varrho+1}$, který se v čitateli zdánlivě vyskytuje, vypadá; i jest tedy čitatel rovný $Q_\varrho(x)$ násobenému konstantou, t. j.

$$(2x+1)\, Q_\varrho(x+1)-(2x-1)\, Q_\varrho(x-1)=C_\varrho\, Q_\varrho(x).$$

Avšak i tuto konstantu lze snadno stanoviti, dosadíme-li ku př.

$$Q_\varrho(x)=A_0 x^\varrho+A_1 x^{\varrho-1}+\ldots+A_\varrho$$

a porovnáme-li součinitele u x^ϱ na obou stranách při $A_0 \gtrless 0$. Dostaneme $C_\varrho=4\varrho+2$, takže dostáváme pro $Q_\varrho(x)$ tuto rovnici funkcionální

$$(2x+1)\, Q_\varrho(x+1)-(2x-1)\, Q_\varrho(x-1)=(4\varrho+2)\, Q_\varrho(x). \tag{9}$$

Rovnicí touto jsou určeny až na jeden koefficient, který si můžeme zvoliti libovolně, všecky ostatní součinitele výrazu $Q_\varrho(x)$. Abychom $Q_\varrho(x)$ určili úplně, stanovíme, že součinitel při x^ϱ ve $Q_\varrho(x)$ jest 2^ϱ *). Klademe-li pak v (9) $\varrho = 1$ a $Q_1(x) = 2x + A_1$, dostáváme ihned, jelikož (9) jest splněna identicky, $A_1 = 0$. Podobně kdybychom kladli $\varrho = 2$, $Q_2(x) = 2^2x^2 + A_1x + A_2$, obdrželi bychom z (9), že $A_1 = 0$, $A_2 = 1$.

I pro čitatele $P_\varrho(x)$ lze z (6) a (8) získati rovnici funkcionální. Násobíme-li (6) součinem $(2x + 1)\, Q_\varrho(x)\, Q_\varrho(x + 1)$, výraz (8) pak součinem $(2x - 1)\, Q_\varrho(x)\, Q_\varrho(x - 1)$ a vzniklé tak rovnice odečteme, obdržíme používajíce (9) po jednoduché úpravě vztah

$$\begin{aligned}(2x + 1)\, P_\varrho(x + 1) - (2x - 1)\, P_\varrho(x - 1) &= \\ - (4\varrho + 2)\, P_\varrho(x) - [Q_\varrho(x + 1) - Q_\varrho(x - 1)],&\end{aligned} \tag{10}$$

kterýžto stanoví, známe-li $Q_\varrho(x)$, součinitele ve výraze $P_\varrho(x) = B_1x^{\varrho-1} + B_2x^{\varrho-2} + \ldots + B_\varrho$ úplně. Máme tak pro první dvě hodnoty $\varrho = 1, 2$ tyto výsledky

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= 2x, & P_1(x) &= -\tfrac{1}{2}, \\ Q_2(x) &= 4x^2 + 1, & P_2(x) &= -x. \end{aligned} \tag{11}$$

Že polynomy $P_\varrho(x)$ a $Q_\varrho(x)$ vyhovují rovnici (6), kde A_ϱ jest konstanta, vyplývá snadno na základě rovnic (9) a (10). Neboť jsou-li P_ϱ a Q_ϱ libovolné mnohočleny, jest A_ϱ rovnicí (6) dané obecně jistý polynom v x, označme jej pro okamžik $\mathsf{A}_\varrho(x)$. Jelikož pak rovnice (8) vznikla z (6) tím, že jsme psali $x - 1$ místo x, jest A_ϱ rovnicí (8) určené v obecném případě $\mathsf{A}_\varrho(x - 1)$. Vypočteme-li pak z rovnice (6) $\mathsf{A}_\varrho(x)$ a z rovnice (8) $\mathsf{A}_\varrho(x - 1)$, dokážeme ihned, že v *našem* případě, kde vyhovují $P_\varrho(x)$ a $Q_\varrho(x)$ určitým funkcionálním rovnicím, $\mathsf{A}_\varrho(x) = \mathsf{A}_\varrho(x - 1)$, t. j. že jest tu A_ϱ konstantním.

---

*) Že stanovení koefficientů jest jednoznačné a vždy možné, přesvědčí se čtenář dosazením výrazů $Q_\varrho(x) = 2^\varrho x^\varrho + A_1x^{\varrho-1} + A_2x^{\varrho-2} + \ldots + A_\varrho$ do funkcionální rovnice (9). Dostane porovnáním koefficientů při x^ϱ, $x^{\varrho-1}$, $x^{\varrho-2}, \ldots$ na obou stranách řadu rovnic, z nichž prvá jest splněna identicky druhá obsahuje toliko A_1, třetí jenom A_1 a A_2, atd.

Zaměníme-li v (9) x v $-x$, dostáváme po jednoduché úpravě

$$(2x+1)\,Q_\varrho(-x-1) - (2x-1)\,Q_\varrho(-x+1) = (4\varrho+2)\,Q_\varrho(-x),$$

t. j. dostáváme, že, vyhovuje-li té rovnici funkcionální $Q_\varrho(x)$, jí také vyhovuje $Q_\varrho(-x)$. Jelikož pak rovnicí danou jest $Q_\varrho(x)$ až na první koefficient úplně stanoveno a ten se záměnou x v $-x$ násobí činitelem $(-1)^\varrho$, vidíme ihned, že

$$Q_\varrho(-x) = (-1)^\varrho\, Q_\varrho(x);$$

obsahuje tedy polynom $Q_\varrho(x)$ jenom sudé mocniny x, je-li ϱ sudé, a jenom liché mocniny, je-li ϱ liché. Podobně se dokáže, že $P_\varrho(x)$ jest sudý mnohočlen v x (resp. lichý), je-li ϱ liché (resp. sudé).

3. Rovnice funkcionální nejsou však nejpohodlnější prostředek pro výpočet mnohočlenů $P_\varrho(x)$, $Q_\varrho(x)$; lze snadno udati jiný. Odečteme-li od rovnice (6) rovnici, kterou dostaneme z (6) záměnou ϱ v $\varrho-1$, dostaneme po jednoduché úpravě

$$\frac{P_\varrho(x)\,Q_{\varrho-1}(x) - P_{\varrho-1}(x)\,Q_\varrho(x)}{Q_\varrho(x)\,Q_{\varrho-1}(x)} + \frac{P_\varrho(x+1)\,Q_{\varrho-1}(x+1) - P_{\varrho-1}(x+1)\,Q_\varrho(x+1)}{Q_\varrho(x+1)\,Q_{\varrho-1}(x+1)} =$$

$$\frac{\mathsf{A}_\varrho}{(2x+1)\,Q_\varrho(x)\,Q_\varrho(x+1)} - \frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{(2x+1)\,Q_{\varrho-1}(x)\,Q_{\varrho-1}(x+1)}$$

Kdybychom provedli dělení na pravé straně podle klesajících mocností x, obdrželi bychom jako nejvyšší člen

$$-\frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{2^{2\varrho-1}\,x^{2\varrho-1}}.$$

Tentýž člen dostati musíme i na levé straně; oba členy levé strany začínají však týmž nejvyšším členem a jest tedy nutně stupeň jmenovatele v x u obou členů o $2\varrho-1$ jednotek vyšší než stupeň čitatele; tudíž, jelikož stupeň jmenovatele jest

$2\varrho - 1$, jest stupeň čitatele 0, t. j. čitatel jest konstanta. Jest pak, jak snadno dělením získáváme (počítajíce toliko prvý člen podílu),

$$P_\varrho(x)\, Q_{\varrho-1}(x) - P_{\varrho-1}(x)\, Q_\varrho(x) = -\tfrac{1}{2}\mathsf{A}_{\varrho-1}. \tag{12}$$

Zmenšíme-li v této rovnici ϱ o jednotku (a násobíme-li zároveň -1), máme dále

$$P_{\varrho-2}(x)\, Q_{\varrho-1}(x) - P_{\varrho-1}(x)\, Q_{\varrho-2}(x) = \tfrac{1}{2}\mathsf{A}_{\varrho-2}.$$

Vyloučením konstantního členu z obou posledních rovnic obdržíme

$$\left(P_\varrho(x) + \frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{\mathsf{A}_{\varrho-2}} P_{\varrho-2}(x)\right) Q_{\varrho-1}(x) -$$

$$P_{\varrho-1}(x) \left(Q_\varrho(x) + \frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{\mathsf{A}_{\varrho-2}} Q_{\varrho-2}(x)\right) = 0,$$

odkudž ihned (neboť dle (12) $P_{\varrho-1}(x)$, $Q_{\varrho-1}(x)$ nemají společné míry, $Q_\varrho(x)$ jest pak funkce sudá či lichá dle toho, zda ϱ sudé či liché a koefficient nejvyšší mocnosti jest 2ϱ)

$$Q_\varrho(x) + \frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{\mathsf{A}_{\varrho-2}} Q_{\varrho-2}(x) = 2x\, Q_{\varrho-1}(x);$$

t. j. platí rovnice

$$\left.\begin{aligned} Q_\varrho(x) &= 2x\, Q_{\varrho-1}(x) - \frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{\mathsf{A}_{\varrho-2}} Q_{\varrho-2}(x), \\ P_\varrho(x) &= 2x\, P_{\varrho-1}(x) - \frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{\mathsf{A}_{\varrho-2}} P_{\varrho-2}(x). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

V nich zbývá ještě vypočísti poměr $\dfrac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{\mathsf{A}_{\varrho-2}}$. K tomu cíli postačí stanoviti součinitele u $x^{\varrho-2}$ v $Q_\varrho(x)$, což učiníme na základě rovnice funkcionální (9). Dostaneme pro tento koefficient $A_2^{(\varrho)}$ snadným počtem (viz poznámku na str. 357.) výraz

$$A_2^{(\varrho)} = 2^{\varrho-2}\, \frac{\varrho(\varrho-1)(2\varrho-1)}{6}.$$

Porovnáme li pak v první z rovnic (13) na obou stranách součinitele u $x^{\varrho-2}$, obdržíme

$$\frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{\mathsf{A}_{\varrho-2}} = -(\varrho-1)^2, \tag{14}$$

tudíž lze (13) psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} Q_\varrho(x) &= 2x\, Q_{\varrho-1}(x) + (\varrho-1)^2\, Q_{\varrho-2}(x), \\ P_\varrho(x) &= 2x\, P_{\varrho-1}(x) + (\varrho-1)^2\, P_{\varrho-2}(x), \end{aligned} \tag{15}$$

Zároveň vyplývá z (14) a z okolnosti, že $\mathsf{A}_1 = -1$

$$\mathsf{A}_\varrho = (-1)^\varrho \,.\, (\varrho\,!)^2.$$

Z rovnic (15) získáme si na základě okolnosti, že známe $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ postupně snadno

$Q_3(x) = 8x^3 + 10x$ $\quad P_3(x) = -2x^2 - 2$

$Q_4(x) = 16x^4 + 56x^2 + 9$ $\quad P_4(x) = -4x^3 - 13x$

$Q_5(x) = 32x^5 + 240x^3 + 178x$ $\quad P_5(x) = -8x^4 - 58x^2 - 32$

$Q_6(x) = 64x^6 + 880x^4 + 1756x^2 + 225$

$\quad P_6(x) = -16x^5 - 216x^3 - 389x.$

4. Počítejme součet řady dané jenom na základě $Q_4(x)$, $P_4(x)$, užívajíce toliko prvých 6 členů, dostáváme součet

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{4 \,.\, 6^3 + 13 \,.\, 6}{16 \,.\, 6^4 + 56 \,.\, 6^2 + 9},$$

který jest menší než součet nekonečné řady, t. j. než $\frac{\pi}{4}$ o méně než

$$\frac{(24)^2}{13 \,.\, (16 \,.\, 6^4 + 56 \,.\, 6^2 + 9)(16 \,.\, 7^4 + 56 \,.\, 7^2 + 9)} < 0{\cdot}000\,000\,05.$$

Dostáváme pro součet s a $4s$ tyto hodnoty

$$s = 0{\cdot}785398126\ldots, \quad 4s = 3{\cdot}141592504;$$

pro π jest pak, jak známo,

$$\pi = 3{\cdot}14159265\ldots$$

Uvážíme li, že výpočet čísla s jest zcela jednoduchý a že přesnost výpočtu lze libovolně zvýšiti jednak volbou většího ϱ, jednak přibráním většího počtu členů, vidíme, že i řada zdánlivě tak málo vhodná ku výpočtu čísla π poskytuje dosti pohodlný prostředek to číslo s libovolnou přesností vypočítati.

5. Rovnice (15) však nám poskytují ještě prostředek, výsledek dosažený formálně zjednodušiti. Z nich a z okolnosti, že

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2x}, \quad \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2x + \frac{1}{2x}}$$

vyplývá obecně

$$\frac{P_\varrho(x)}{Q_\varrho(x)} = \cfrac{-\frac{1}{2}}{2x + \cfrac{1^2}{2x + \cfrac{2^2}{2x + \cdots + \cfrac{(\varrho - 1)^2}{2x}}}},$$

t. j. vyplývá vyjádření posledního členu součtu (7) ve tvaru zlomku řetězového. Tak máme výsledek:

Součet řady dané (1) *jest dán přibližně součtem*

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + (-1)^{n-1} \frac{P_\varrho(n)}{Q_\varrho(n)}$$

kde $\frac{P_\varrho(n)}{Q_\varrho(n)}$ *jest* ϱ-*tá přibližná hodnota nekonečného zlomku řetězového*

$$\cfrac{1}{2n + \cfrac{1^2}{2n + \cfrac{2^2}{2n + \cdots}}}$$

násobená $-\frac{1}{2}$. *Při tom jest chyba absolutně menší než číslo*

$$\frac{(-1)^{n+\varrho} (\varrho!)^2}{(2n+1)\, Q_\varrho(n)\, Q_\varrho(n+1)}$$

a s ním ve znaménku shodná.

6. Výsledků docílených můžeme však použíti ještě k jedné zajímavé transformaci řady (1). *Budeme předpokládati ϱ sudé*; tu jest $P_\varrho(0) = 0$ a součet řady (1) rovný jest součtu řady

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{P_\varrho(0)}{Q_\varrho(0)} + \frac{P_\varrho(1)}{Q_\varrho(1)}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{P_\varrho(1)}{Q_\varrho(1)} + \frac{P_\varrho(2)}{Q_\varrho(2)}\right) + \ldots \quad (16)$$

t. j. součtu řady

$$(\varrho!)^2 \left(\frac{1}{1\, Q_\varrho(0)\, Q_\varrho(1)} - \frac{1}{3\, Q_\varrho(1)\, Q_\varrho(2)} + \frac{1}{5\, Q_\varrho(2)\, Q_\varrho(3)} - \ldots\right) \quad (16)$$

Jest snadno $Q_\varrho(0)$ vypočítati. Dle (15) jest

$$Q_\varrho(0) = (\varrho - 1)^2\, Q_{\varrho-2}(0)$$

a tudíž jelikož $Q_2(0) = 1$, jest

$$Q_\varrho(0) = 1^2 \,.\, 3^2 \cdot 5^2 \ldots (\varrho - 1)^2.$$

$Q_\varrho(1)$ vypočteme snadno z rovnice funkcionální (9), položíme-li tam $x = 0$. Označíme-li k vůli stručnosti $2\varrho + 1 = a$, máme ihned

$$Q_\varrho(1) = a\, Q_\varrho(0).$$

$Q_\varrho(2)$ vypočteme rovněž z (9) kladouce $x = 1$, tak jest

$$3\, Q_\varrho(2) - Q_\varrho(0) = 2a\, Q_\varrho(1), \quad Q_\varrho(2) = \frac{2a^2 + 1}{1\,.\,3}\, Q(0).$$

Píšeme-li obecně

$$Q_\varrho(k) = \frac{\Pi_k(a)}{1\,.\,3\ldots 2k-1}\, Q(0)$$

máme ihned z rovnice funkcionální (pro $x = k - 1$) vztah:

$$\Pi_k(a) = 2a\, \Pi_{k-1}(a) + (2k-3)^2\, \Pi_{k-2}(a),$$

kterýžto vztah na základě, že $\Pi_1(a) = a$, $\Pi_2(a) = 2a^2 + 1$ stanoví všecka $\Pi_k(a)$ a to jakožto jmenovatele přibližných zlomků nekonečného řetězce

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1^2}{2a + \cfrac{3^2}{2a + \cfrac{5^2}{2a + \cdots}}}}$$

Zavedením čísel $\Pi_k(a)$ zjednáváme si pro řadu (16) tento výraz

$$\frac{\pi}{4} = \frac{(\varrho\,!)^2}{1^4 \,.\, 3^4 \,.\, 5^4 \ldots (\varrho - 1)^4}\left[\frac{1}{\Pi_1(a)} - \frac{1^2}{\Pi_1(a)\,\Pi_2(a)} + \frac{1^2 \,.\, 3^2}{\Pi_2(a)\,\Pi_3(a)} - \ldots\right] \tag{17}$$

Avšak řada nekonečná v hranaté závorce uvedená jest, jak by snadno bylo možno ukázati, hodnota posledně uvedeného řetězce nekonečného. Tak dospíváme k tomuto vyjádření čísla $\frac{\pi}{4}$ nekonečným řetězcem

$$\frac{\pi}{4} = \frac{(\varrho\,!)^2}{1^4 \,.\, 3^4 \,.\, 5^4 \ldots (\varrho - 1)^4} \cdot \cfrac{1}{2\varrho + 1 + \cfrac{1^2}{4\varrho + 2 + \cfrac{3^2}{4\varrho + 2 + \ldots}}} \tag{18}$$

I toto vyjádření dovoluje číslo π s libovolnou přesností bez veliké námahy vypočísti. Kdybychom ku př. vzali $\varrho = 4$ a šestou přibližnou hodnotu řetězce, obdrželi bychom pro $\frac{\pi}{4}$ číslo svrchu vypočtené. Počet však jest méně pohodlný než přímo pomocí řady (svrchu provedený).

Vyjádření to jest však proto pozoruhodné, že v něm jest obsažena t. zv. *Wallisova* formule pro π; neboť z (17) anebo z (18) vyplývá, že výraz (ϱ sudé)

$$\frac{2^2 \,.\, 4^2 \,.\, 6^2 \ldots \varrho^2}{1^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 \quad (\varrho - 1)^2} \cdot \frac{1}{2\varrho + 1}$$

s rostoucím ϱ konverguje ku $\frac{\pi}{4}$.

Avšak i formule (18) jest dávno známa; odvozuje ji (aspoň pro malá ϱ) již *Euler* v pojednání „De fractionibus continuis Wallisii" (Mém. Pétr. 5, pour l'année 1812)*).

---

*) Citováno dle knihy O. Perron, »Die Lehre von den Kettenbrüchen«, 1913.

7. Polynomy $P_\varrho(x)$ a $Q_\varrho(x)$ v předcházejícím odvozené a pro nejnižší indexy vypočtené dovolují nám provésti sčítání řady poněkud obecnější a to

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{2+\alpha}-\frac{1}{3+\alpha}+\ldots, \tag{19}$$

kde α jest libovolné číslo reálné, vyjmeme-li čísla záporná celá a nullu. Řadu (1) dostaneme z této, učiníme-li $\alpha=\frac{1}{2}$ a dělíme-li ji pak 2. Užijeme-li methody pro řadu (1) vyložené v tomto případě, běží o stanovení polynomů $\overline{P_\varrho}(x)$, $\overline{Q_\varrho}(x)$ tak, aby splněna byla identicky rovnice

$$\frac{1}{x+\alpha}+\frac{\overline{P_\varrho}(x)}{\overline{Q_\varrho}(x)}+\frac{\overline{P_\varrho}(x+1)}{\overline{Q_\varrho}(x+1)}=\frac{\overline{\mathbf{A}_\varrho}}{(x+\alpha)\,\overline{Q_\varrho}(x)\,\overline{Q_\varrho}(x+1)},$$

kde $\overline{\mathbf{A}_\varrho}$ jest konstanta (v obecném případě polynom v x stupně co nejmenšího a nezávislého na ϱ). Položíme-li v této rovnici $x=\xi+\frac{1}{2}-\alpha$, dostaneme, dělíme-li ještě dvěma,

$$\frac{1}{2\xi+1}+\frac{\frac{1}{2}\overline{P_\varrho}(\xi+\frac{1}{2}-\alpha)}{\overline{Q_\varrho}(\xi+\frac{1}{2}-\alpha)}+\frac{\frac{1}{2}\overline{P_\varrho}(\xi+\frac{3}{2}-\alpha)}{\overline{Q_\varrho}(\xi+\frac{3}{2}-\alpha)}=$$

$$\frac{\overline{\mathbf{A}_\varrho}}{(2\xi+1)\,\overline{Q_\varrho}(\xi+\frac{1}{2}-\alpha)\,\overline{Q_\varrho}(\xi+\frac{3}{2}-\alpha)}.$$

Odtud porovnáním s (6) ihned vyplývá:

$$\overline{Q_\varrho}(\xi+\tfrac{1}{2}-\alpha)=Q_\varrho(\xi)$$

aneb

$$\overline{Q_\varrho}(x)=Q_\varrho(x+\alpha-\tfrac{1}{2})$$

a podobně

$$\overline{P_\varrho}(x)=2P_\varrho(x+\alpha-\tfrac{1}{2}),$$
$$\overline{\mathbf{A}_\varrho}=\mathbf{A}_\varrho.$$

Tak pro řadu (19) máme tento výsledek: Součet řady (19) jest rovný přibližně výrazu

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{2+\alpha}-\ldots\;+(-1)^{n-1}\frac{1}{n-1+\alpha}+$$

$$+\,2\,\frac{(-1)^{n-1}P_\varrho(n+\alpha-\frac{1}{2})}{Q_\varrho(n+\alpha-\frac{1}{2})},$$

kde poslední člen jest ϱ-tá přibližná hodnota nekonečného zlomku řetězového ($2P_\varrho$, Q_ϱ jsou čitatel a jmenovatel ϱ-tého zblíženého zlomku)

$$\cfrac{-1}{2n+2\alpha-1+\cfrac{1^2}{2n+2\alpha-1+\cfrac{2^2}{2n+2\alpha-1+\cfrac{3^2}{\cdots}}}} \tag{20}$$

násobená $(-1)^{n-1}$. Při tom jest chyba absolutně menší než číslo

$$\frac{(-1)^{n+\varrho}(\varrho\,!)^2}{(n+\alpha)\,Q_\varrho\,(n+\alpha-\frac{1}{2})\,Q_\varrho\,(n+\alpha+\frac{1}{2})}. \tag{21}$$

a co do znaménka s ním shodná.

8. Užijme této věty na výpočet řady (při $\alpha = 1$)

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

jejíž součet jest přirozený $log\,2$, číslo v analysi rovněž důležité. Počítejme je z výrazu

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{2P_5\,(\frac{21}{2})}{Q_5\,(\frac{21}{2})}.$$

Provedeme-li příslušné počty, dostaneme

$$\frac{2P_5\,(\frac{21}{2})}{Q_5\,(\frac{21}{2})}=\cfrac{-1}{21+\cfrac{1^2}{21+\cdots+\cfrac{4^2}{21}}}=\frac{-207334}{4363800}$$

$$=-0{\cdot}047512259957$$

a

$$\text{přir. } log\;2 = 0{\cdot}693147180592 + \vartheta,$$

kde číslo záporné ϑ jest odchylka hodnoty vypočtené od pravé hodnoty $log\;2$ a jest

$$|\vartheta| < 3{\cdot}5\,.\,10^{-11}.$$

Poznámka. Řadě pro *log* 2 mohli bychom dáti podobně jako svrchu řadě pro $\frac{\pi}{4}$ tento tvar

$$log\, 2 = -\frac{2P_\varrho(\frac{1}{2})}{Q_\varrho(\frac{1}{2})} + \frac{\mathsf{A}_\varrho}{1\, Q_\varrho(\frac{1}{2})\, Q_\varrho(\frac{3}{2})} - \frac{\mathsf{A}_\varrho}{2\, Q_\varrho(\frac{3}{2})\, Q_\varrho(\frac{5}{2})} + \frac{\mathsf{A}_\varrho}{3\, Q_\varrho(\frac{5}{2})\, Q_\varrho(\frac{7}{2})} + \ldots$$

Jest však, jak snadno si zjednáme, (z 15)

$$Q_\varrho(\tfrac{1}{2}) = \varrho\,!$$

Avšak z funkcionální rovnice (9) vyplývá, klademe-li $x = \frac{1}{2}$ a $x = k - \frac{1}{2}$

$$Q_\varrho(\tfrac{3}{2}) = a\, Q(\tfrac{1}{2}),\quad k\, Q_\varrho(k + \tfrac{1}{2}) = a\, Q_\varrho(k - \tfrac{1}{2}) + (k-1)\, Q_\varrho(k - \tfrac{3}{2}),$$

kde $a = 2\varrho + 1$. Položíme-li pro jednoduchost

$$Q_\varrho(k + \tfrac{1}{2}) = \frac{A_k(a)}{k!}\, Q_\varrho(\tfrac{1}{2}),$$

máme pro $A_k(a)$ tento vztah

$$A_k(a) = a\, A_{k-1}(a) + (k-1)^2 A_{k-2}(a),\ A_0(a) = 1,\ A_1(a) = a$$

t. j. $A_k(a)$ jest jmenovatel k-té sblížené hodnoty řetězového zlomku nekonečného

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1^2}{a + \cfrac{2^2}{a + \cfrac{3^2}{a + \cdot}}}}$$

a pro *log* 2 jest platný vztah (který se podobně odvodí, jako obdobný svrchu pro $\frac{\pi}{4}$).

$$log\, 2 = \frac{1}{1+}\frac{1^2}{1+}\frac{2^2}{1+}\cdots+\frac{(\varrho-1)^2}{1} +$$

$$+ (-1)^{\varrho}\frac{1}{2\varrho+1+}\frac{1^2}{2\varrho+1+}\frac{2^2}{2\varrho+1+}\cdots$$

t. j. *log* 2 jest vyjádřen jakožto součet dvou zlomků řetězových, z nich první jest konečný o ϱ členech, druhý nekonečný tím rychleji konvergující, čím větší jest ϱ. Výsledek tento však, srovnáme-li jej s předcházejícím, neposkytuje téměř nic nového, neboť nekonečný řetězový zlomek tu se vyskytující shoduje se s (20), položíme-li $2n + 2\alpha - 1 = 2\varrho + 1$; následuje z něho toliko, že

$$\frac{1}{1+}\frac{1^2}{1+}\frac{2^2}{1+}\cdots+\frac{(\varrho-1)^2}{1}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{\varrho-1}}{\varrho}.$$

II.

9. Než přistoupím ku vyšetřování dalších příkladů, bude užitečno odvoditi některé obecné formule. Při tom užívati budu označení jiného než v odstavcích předcházejících (abych nezavdal příčinu k nedorozuměním).

Jak jsme v odstavci 1. shledali, běží hlavně o řešení tohoto úkolu: K dané racionálné funkci $\frac{V(x)}{U(x)}$ nalézti racionálnou funkci $\frac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)}$ tak, aby výraz

$$\frac{V(x)}{U(x)} + \frac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)} - a\,\frac{\psi_\varrho(x+1)}{\varphi_\varrho(x+1)} = \frac{A_\varrho(x)}{U(x)\,\varphi_\varrho(x)\,\varphi_\varrho(x+1)} \quad (1)$$

kde $A_\varrho(x)$ jest polynom v x stupně co nejmenšího. Buď $U(x)$ stupně q s koefficientem při nejvyšší mocnosti x rovným 1, a stanovme, že $\varphi_\varrho(x)$ má býti stupně ϱ se součinitelem při nejvyšší mocnosti x rovným 1. Pak jest nejprve jasno, že rozdíl stupňů polynomů $V(x)$, $U(x)$ jest rovný rozdílu stupňů mnohočlenů ψ_ϱ, φ_ϱ při a různém od 1; když $a = 1$ jest poslední rozdíl (obecně) o 1 větší. Spočítáme-li počet koefficientů v ψ_ϱ a φ_ϱ, které si můžeme libovolně voliti, vidíme snadno, že vhodnou volbou těchto součinitelů bude lze *v obecném případě* docíliti, aby $A_\varrho(x)$ bylo stupně $q-1$, když $a \gtrless 1$; jestliže $a = 1$, pak stupně $q - 2$. Ve zvláštních případech ovšem rovnice pro koefficienty u φ_ϱ, ψ_ϱ, které se vyžadují, aby $A_\varrho(x)$ bylo stupně $q - 1$ resp. $q - 2$, nejsou při *každém* ϱ řešitelny, my však budeme k vůli jednoduchosti míti v následujícím na zřeteli jenom případ, kdy *tyto rovnice jsou řešitelny při každém* $\varrho \geqq \varrho_0$, kde ϱ_0 jest buď nulla nebo některé číslo celé kladné, *a dávají pro* ψ_ϱ, φ_ϱ *mnohočleny bez společné míry.*

Napíšeme-li rovnici (1) při ϱ o jednu menším a obě rovnice odečteme, obdržíme

$$\frac{\psi_\varrho(x)}{\varphi_\varrho(x)} - \frac{\psi_{\varrho-1}(x)}{\varphi_{\varrho-1}(x)} - a\left(\frac{\psi_\varrho(x+1)}{\varphi_\varrho(x+1)} - \frac{\psi_{\varrho-1}(x)}{\varphi_{\varrho-1}(x)}\right) =$$

$$\frac{A_\varrho(x)}{U(x)\,\varphi_\varrho(x)\,\varphi_\varrho(x+1)} - \frac{A_{\varrho-1}(x)}{U(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x+1)}$$

ze kteréžto rovnice způsobem jako svrchu na str. 359. ve případě zvláštním následuje nejprve při *a různém od 1*

$$\psi_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x) - \psi_{\varrho-1}(x)\,\varphi_\varrho(x) = -\frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{1-a} \tag{2}$$

kde $\mathbf{A}_\varrho$ jest koefficientem nejvyšší mocnosti x ve výraze $A_\varrho(x)$, který jest tudíž následkem učiněných předpokladů (o stupních mnohočlenů φ_ϱ, $\varphi_{\varrho-1}$) jistě od nully různý.

Z této rovnice plyne opět jako svrchu

$$\psi_\varrho(x) = (x + \beta_\varrho)\,\psi_{\varrho-1}(x) - \frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{\mathbf{A}_{\varrho-2}}\,\psi_{\varrho-2}(x),$$

$$\varphi_\varrho(x) = (x + \beta_\varrho)\,\varphi_{\varrho-1}(x) - \frac{\mathbf{A}_{\varrho-1}}{\mathbf{A}_{\varrho-2}}\,\varphi_{\varrho-2}(x),$$

anebo klademe-li

$$-\frac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{\mathsf{A}_{\varrho-2}} = d_\varrho, \quad x + \beta_\varrho = b_\varrho(x), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\varrho(x) &= b_\varrho(x)\,\psi_{\varrho-1}(x) + d_\varrho\,\psi_{\varrho-2}(x), \\ \varphi_\varrho(x) &= b_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x) + d_\varrho\,\varphi_{\varrho-2}(x). \end{aligned} \tag{3'}$$

Při tom jest ovšem $a \gtrless 1$ a $\varrho - 2 \geqq \varrho_0$. Jestliže $a = 1$, jest

$$\psi_\varrho(x)\,\varphi_{\varrho-1}(x) - \psi_{\varrho-1}(x)\,\varphi_\varrho(x) = \frac{-\mathsf{A}_{\varrho-1}}{2\varrho-1}, \tag{2'}$$

Rovnice (3′) zůstávají v platnosti i při $a = 1$, při čemž však jest $d_\varrho = -\dfrac{2\varrho-3}{2\varrho-1}\,\dfrac{\mathsf{A}_{\varrho-1}}{\mathsf{A}_{\varrho-2}}$.

(Dokončení.)

Základové projektivní geometrie.

Studujícím středních škol podává dr. **Jos. Kounovský.**

(Dokončení.)

V obr. 6. jsou dány dva projektivní svazky o vrcholech N_1 a N_2 třemi dvojinami sdružených paprsků a_1a_2, b_1b_2 a c_1c_2. Sestrojiti d_2, dáno-li libovolně d_1.

Protněme přímku a_1 paprsky a_2, b_2, c_2, ... v řadě A_2, B_2, C_2, ... a přímku a_2 paprsky a_1, b_1, c_1, ... v řadě A_1, B_1, C_1, ... Řady bodové A_2, B_2, C_2, ... a A_1, B_1, C_1, ... jsou projektivní, ježto však průsečík obou jest bodem samodružným $A_1 \equiv A_2$, jsou řady ty perspektivní a jsou řezy téhož svazku b_0, c_0, ... o vrcholu N_0, stanoveném spojnicemi B_1B_2 a C_1C_2. Bod N_0 jest *perspektivní střed* svazků N_1 a N_2. Paprsek d_1 určí na a_2 bod D_1, spojnice D_1N_0 stanoví na a_1 bod D_2 a tím prochází žádaný d_2.

Řetěz perspektivních útvarů o nositelích N_1, a_2, N_0, a_1, N_2 odůvodňuje rovnost dvojpoměrů $(a_1b_1c_1d_1) = (a_2b_2c_2d_2)$, čímž ozřejměna konstrukce a ukázáno, že projektivita dvou paprskových svazků, určená třemi dvojinami sdružených prvků, skutečně existuje.