Karel Petr

Poznámka ku předcházejícímu článku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 4, 434--438

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121461`

$$\int_C \frac{log(i+t)\,dt}{1+t^2-\alpha}$$

$$= \left(log(1+\sqrt{1-\alpha})+i\frac{\pi}{2}\right) . 2\pi i \lim_{t=i\sqrt{1-\alpha}} \frac{t-i\sqrt{1-\alpha}}{t^2+1-\alpha}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2i\sqrt{1-\alpha}}\left(log(1+\sqrt{1-\alpha})+i\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}}\left(log(1+\sqrt{1-\alpha})+i\frac{\pi}{2}\right);$$

t. j.

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{log(t+i)\,dt}{1+t^2-\alpha} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha}} log(1+\sqrt{1-\alpha}) - \frac{i\pi^2}{2\sqrt{1-\alpha}},$$

tedy:

$$\frac{1}{2a}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{dt\, log(i+t)}{t^2+1-\alpha}$$

$$= -\frac{\pi}{2a\sqrt{1-\alpha}} log(1+\sqrt{1-\alpha}) - \frac{i\pi^2}{4a\sqrt{1-\alpha}}.$$

Dosadíme-li hodnotu tuto do rovnice (II), obdržíme opět:

$$J = -\frac{\pi}{2a\sqrt{1-\alpha}} log(1+\sqrt{1-\alpha}),$$

t. j.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{log \sin\varphi}{a-b\sin^2\varphi}\,d\varphi = -\frac{\pi}{2a\sqrt{1-\frac{b}{a}}} log\left(1+\sqrt{1-\frac{b}{a}}\right).$$

Poznámka ku předcházejícímu článku.

Od **r.**

Věty o residuech, jež na druhém místě v článku předcházejícím bylo použito, lze použíti ku výpočtu toho integrálu ještě jiným jednodušším způsobem.

Lze stanoviti bez větší námahy integrál poněkud obecněj

$$\int_0^{\pi} \log \frac{A_1 \cos^2 \varphi + 2B_1 \cos \varphi \sin \varphi + C_1 \sin^2 \varphi}{A_2 \cos^2 \varphi + 2B_2 \cos \varphi \sin \varphi + C_2 \sin^2 \varphi} \cdot$$

$$\cdot \frac{d\varphi}{a \cos^2 \varphi + 2b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi}. \tag{1}$$

Za tím účelem uvažujme integrál

$$\int \log \frac{M_1 z + N_1}{M_2 z + N_2} \frac{dz}{(mz + n)(\bar{n}z + \bar{m})}, \tag{2}$$

v němž integrační čára jest kruh s poloměrem $r = 1$ a o středu $z_0 = 0$ a v němž

$$|m| > |n|, \quad |M_1| < |N_1|, \quad |M_2| < |N_2|;$$

$\bar{m}$, resp. $\bar{n}$ jsou čísla komplexní sdružená ku číslům m, resp. n. Dle věty o residuech jest hodnota integrálu (2) rovna

$$\frac{2\pi i}{m\bar{m} - n\bar{n}} \log \frac{M_1 n - N_1 m}{M_2 n - N_2 m}. \tag{3}$$

Zavedeme-li do (2) $z = e^{i\varphi}$ a rozložíme-li integrál v část reálnou a ryze imaginárnou a rovněž tak při (3), máme ihned srovnáním částí ryze imaginárných ve (2) a (3)

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{(M_1 e^{i\varphi} + N_1)(\bar{M}_1 e^{-i\varphi} + \bar{N}_1)}{(M_2 e^{i\varphi} + N_2)(\bar{M}_2 e^{-i\varphi} + \bar{N}_2)} \cdot \frac{d\varphi}{(me^{i\varphi} + n)(\bar{m}e^{-i\varphi} + \bar{n})}$$

$$= \frac{2\pi}{m\bar{m} - n\bar{n}} \log \frac{(M_1 n - N_1 m)(\bar{M}_1 \bar{n} - \bar{N}_1 \bar{m})}{(M_2 n - N_2 m)(\bar{M}_2 \bar{n} - \bar{N}_2 \bar{m})}, \tag{4}$$

při čemž značí $\bar{M}_1$, $\bar{N}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{N}_2$ čísla komplexní sdružená ku M_1, N_1, M_2, N_2.

Výraz $(me^{i\varphi} + n)(\bar{m}e^{-i\varphi} + \bar{n})$ jest lineárnou celistvou funkcí $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ tvaru $\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi + \gamma$; zavedeme-li novou proměnnou φ rovnicí $\varphi = 2\varphi'$, lze mu dáti snadno v (1) použitý tvar $a \cos^2 \varphi' + 2b \cos \varphi' \sin \varphi' + c \sin^2 \varphi'$, kde

$$\begin{aligned} a &= (m + n)(\bar{m} + \bar{n}), \\ b &= i(m\bar{n} - \bar{m}n), \\ c &= (m - n)(\bar{m} - \bar{n}). \end{aligned} \tag{5}$$

Z rovnic těchto vyplývá

$$ac - b^2 = (m\bar{m} - n\bar{n})^2; \tag{5'}$$

i jest tudíž $ac - b^2 > 0$. Lze snadno ukázati, že, ať jsou dány a, b, c jakkoliv, jen když $ac - b^2 > 0$ a když a (i c) jsou kladny, vždy lze stanoviti komplexní čísla m, n tak, aby $|m| > |n|$ a aby splněno bylo (5). Neboť z (5) a (5′) máme ihned

$$\begin{aligned} 4m\bar{m} &= a + c + 2\sqrt{ac - b^2}, \\ 4n\bar{n} &= a + c + 2\sqrt{ac - b^2}, \\ 4m\bar{n} &= a - c - 2ib, \\ 4\bar{m}n &= a - c + 2ib. \end{aligned} \tag{6}$$

Zvolíme-li si m reálné ($m = \bar{m}$) a kladné, jest těmito vztahy m, n, $\bar{n}$ jednoznačně stanoveno. Podobné úvahy lze provésti i pro výrazy ostatní, ku př. pro $(M_1 e^{i\varphi} + N_1)(\bar{M}_1 e^{-i\varphi} + \bar{N}_1)$. Tu ovšem se zřetelem ku podmínce $|M_1| < |N_1|$ (či jinak $M_1\bar{M}_1 - N_1\bar{N}_1 < 0$) máme tyto vztahy

$$\begin{aligned} 4M_1\bar{M}_1 &= A_1 + C_1 - 2\sqrt{A_1C_1 - B_1^2}, \\ 4N_1\bar{N}_1 &= A_1 + C_1 + 2\sqrt{A_1C_1 - B_1^2}, \\ 4M_1\bar{N}_1 &= A_1 - C_1 - 2iB_1, \\ 4\bar{M}_1N_1 &= A_1 - C_1 + 2iB_1. \end{aligned}$$

I jest tudíž v (4) dán výpočet libovolného integrálu (1), když jsou splněny podmínky

$$ac - b^2 > 0, \quad A_1C_1 - B_1^2 > 0, \quad A_2C_2 - B_2^2 > 0.$$

Jsou-li a, A_1, A_2 kladné, lze psáti tento výsledek

$$\int_0^\pi log\, \frac{A_1 \cos^2\varphi + 2B_1 \cos\varphi \sin\varphi + C_1 \sin^2\varphi}{A_2 \cos^2\varphi + 2B_2 \cos\varphi \sin\varphi + C_2 \sin^2\varphi} \cdot$$

$$\cdot \frac{d\varphi}{a \cos^2\varphi + 2b \cos\varphi \sin\varphi + c \sin^2\varphi} = \tag{7}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}}\, log\, \frac{A_1c - 2B_1b + C_1a + 2\sqrt{(A_1C_1 - B_1^2)(ac - b^2)}}{A_2c - 2B_2b + C_2a + 2\sqrt{(A_2C_2 - B_2^2)(ac - b^2)}}.$$

Odmocniny na pravé straně této rovnice jest bráti kladně.

Pozoruhodno jest, že výsledek závisí jenom na invariantech systému tří kvadratických forem $ax^2 + 2bxy + cy^2$, $A_1x^2 + \ldots$, $A_2x^2 + \ldots$

V předcházejících vývodech předpokládáno $|M_1| < |N_1|$, $|M_2| < |N_2|$. Lze však připustiti též hodnoty $|M_1| = |N_1|$, resp. $|M_2| = |N_2|$. Jestliže ku př. $|M_1| = |N_1|$ jest kritický bod funkce $log(M_1 z + N_1)$ na kružnici se středem 0 a poloměrem 1 a nemůžeme tuto kružnici celou zvoliti za integrační čáru. V tomto případě (dle známého způsobu) opíšeme kol $-\frac{N_1}{M_1}$ jako středu kruh s poloměrem ϱ dosti malým a složíme uzavřenou integrační čáru z oblouku kružnice $(0, 1)$ a z oblouku kružnice $\left(-\frac{N_1}{M_1}, \varrho\right)$ tak, aby bod $-\frac{N_1}{M_1}$ byl vně integrační čáry, Necháme-li pak ϱ konvergovati k nulle, seznáváme, že výsledek (4) platí i v tom případě, když $|M_1| = |N_1|$. I platí tudíž (7), když $A_1 C_1 - B_1^2 \geqq 0$, $A_2 C_2 - B_2^2 \geqq 0$.

Výsledek pro integrál J v předcházejícím článku vypočtený dostáváme, klademe-li v (7): $A_2 = 1$, $B_2 = 0$, $C_2 = 1$; $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $C_1 = 1$; místo a, b, c pak dosadíme a, 0, $a - b$.

Vztah (4) lze snadno zevšeobecniti. Budiž k tomu cíli $g(z)$ funkce analytická ve všech bodech uvnitř a na obvodě kruhu K s poloměrem r a středem 0 a jež nemá uvnitř ani na obvodě nullových bodů; pak funkce $g(r.z)$ nemá uvnitř a na obvodě kruhu s poloměrem 1 středem 0 žádných singularit ani nullových bodů a máme z věty residuové ihned jako svrchu

$$\int_0^{2\pi} log\,|g(re^{i\varphi})|\,\frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - \alpha|^2} = \frac{2\pi}{r^2 - \alpha\bar{\alpha}}\,log\,|g(\alpha)| \qquad (8)$$

při $|\alpha| < r$.

Jestliže jest $f(z)$ funkce analytická uvnitř a na obvodě K vyjma v bodech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$, kde má póly a jsou-li nullové body té funkce uvnitř K $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ tak, že

$$f(z) = \frac{(z - \beta_1) \ldots (z - \beta_\nu)}{(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_\mu)}\,g(z)$$

a $g(z)$ má vlastnosti svrchu předpokládané, máme ihned užitím (8) a (4)*)

*) Vzorec (4) lze totiž snadno upraviti i pro případ, že $|M_1| > |N_1|$; neboť

$$\left(M_1 e^{i\varphi} + N_1\right)\left(\overline{M_1} e^{-i\varphi} + \overline{N_1}\right) = \left(\overline{N_1} e^{i\varphi} + \overline{M_1}\right)\left(N_1 e^{-i\varphi} + M_1\right)$$

i jest tudíž dle (4) pro $|m| > |n|$, $|M_1| \geqq |N_1|$

$$\int_0^{2\pi} log\,|M_1 e^{i\varphi} + N_1|\,\frac{d\varphi}{|me^{i\varphi} + n|^2} = \frac{2\pi}{|m|^2 - |n|^2}\,log\left|\frac{\overline{M_1}m - \overline{N_1}n}{m}\right|.$$

$$\int_0^{2\pi} \log |f(r\,.\,e^{i\varphi})| \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi}-\alpha|^2} = \frac{2\pi}{r^2-\alpha\bar{\alpha}} \log |f(\alpha)|$$

$$+ \frac{2\pi}{r^2-\alpha\bar{\alpha}} \log \left| \frac{r^\mu(\alpha-\alpha_1)\ldots(\alpha-\alpha_\mu)}{(r^2-\alpha\bar{\alpha}_1)\ldots(r^2-\alpha\bar{\alpha}_\mu)} \right|$$

$$- \frac{2\pi}{r^2-\alpha\bar{\alpha}} \log \left| \frac{r^\nu(\alpha-\beta_1)\ldots(\alpha-\beta_\nu)}{(r^2-\alpha\bar{\beta}_1)\ldots(r^2-\alpha\bar{\beta}_\nu)} \right|.$$

V rovnici této jest

$|\alpha| < r,\ |\alpha_i| < r,\ |\beta_k| < r,\ i = 1, 2, \ldots \mu,\ k = 1, 2, \ldots \nu;$
a zůstává platna i tenkráte, když $f(z)$ má nullové body, resp. póly na obvodě K. Položíme-li v ní $\alpha = \bar{\alpha} = 0$, změní se v

$$\int_0^{2\pi} \log |f(r\,.\,e^{i\varphi})|\, d\varphi = 2\pi \log |f(0)| + 2\pi \log \left| \frac{r^\nu\,.\,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu}{r^\mu\,.\,\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu} \right|,$$

což jest známá relace *Jensenova* *).

Za † inspektorem Josefem Lošťákem.

Při zahájení přednáškové schůze brněnských členů Jednoty českých mathematiků, konané dne 10. února 1909, věnoval p. dvorní rada a prof. *V. Řehořovský* následující posmrtnou vzpomínku zvěčnělému z. šk. inspektoru *J. Lošťákovi*:

„Velectění pánové! V minulém týdnu ukončil pout svého života pan *Josef Lošťák*, zemský školní inspektor v. v. a čestný člen Jednoty českých mathematiků. Zesnulý studoval v letech šedesátých minulého století jako kandidát professury na universitě pražské, tehdy ještě německé, a byl tam členem student-

*) K odvození této relace by postačilo vycházeti z integrálu

$$\int \log (Az + B) \frac{dz}{z}$$

dle kruhu o středu 0 a o poloměru 1. Dostáváme tu

$$\int_0^{2\pi} \log |Ae^{i\varphi} + B|\, d\varphi = 2\pi \log |B| \quad \text{pro } |B| \geqq |A|,$$
$$= 2\pi \log |A| \quad \text{pro } |A| \geqq |B|.$$

Srovnej odvození formule Jensenovy od Goursata (Cours d'Analyse, t. II, str. 127 a násl.), který rovněž, avšak jiným způsobem, používá počtu residuového.