Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Ladislav Štěpánek

Důkaz pro rovnoběžník úhlových rychlostí

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 4, 449--451

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121450

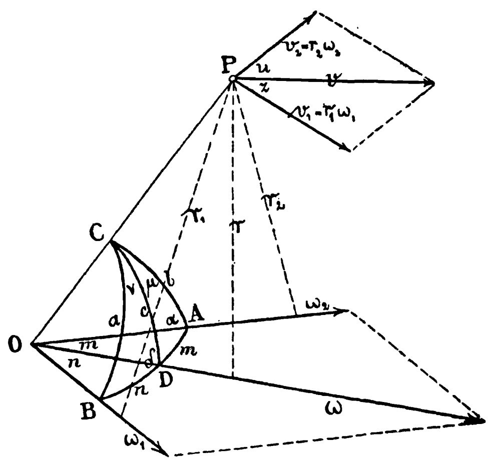
Důkaz pro rovnoběžník úhlových rychlostí.

Napsal **L. Stjepanek** v Záhřebě.

Spustíme-li z libovolného bodu P v prostoru kolmice r_1, r_2 a r na strany ω_1 a ω_2, jakož i na diagonálu ω rovnoběžníka, platí vztah:

$$\frac{r_1 \omega_1}{\sin \mu} = \frac{r_2 \omega_2}{\sin \nu} = \frac{r \omega}{\sin (\mu + \nu)},$$

kdež μ a ν jsou sklony rovin $(r_2 \omega_2)$ a $(r_1 \omega_1)$ k rovině (r, ω).



Tuto geometrickou větu dokážeme následovně:

Ze sférických trojúhelníků ADC a BDC plyne:

$$\frac{\sin m}{\sin \mu} = \frac{\sin b}{\sin \delta} \quad \text{a} \quad \frac{\sin a}{\sin \delta} = \frac{\sin n}{\sin \nu}.$$

Znásobíme-li tyto rovnice navzájem, obdržíme:

$$\frac{\sin a \,.\, \sin m}{\sin \mu} = \frac{\sin b \,.\, \sin n}{\sin \nu}. \tag{1}$$

Dále obdržíme ze sférických trojúhelníků ADC a ABC:

$$\frac{\sin m}{\sin \mu} = \frac{\sin c}{\sin \alpha} \quad \text{a} \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin (m + n)}{\sin (\mu + \nu)}.$$

Také tyto rovnice návzájem znásobme a obdržíme:

$$\frac{\sin a \,.\, \sin m}{\sin \mu} = \frac{\sin c \,.\, \sin (m + n)}{\sin (\mu + \nu)}. \tag{2}$$

Rovnice (1) a (2) můžeme shrnouti ve:

$$\frac{\sin a \,.\, \sin m}{\sin \mu} = \frac{\sin b \,.\, \sin n}{\sin \nu} = \frac{\sin c \,.\, \sin (m + n)}{\sin (\mu + \nu)}.$$

Dosadíme-li do těchto rovnic vztahy

$$\sin a = \frac{r_1}{OP}, \quad \sin b = \frac{r_2}{OP}, \quad \sin c = \frac{r}{OP}$$

a dále

$$\sin m : \sin n : \sin (m + n) = \omega_1 : \omega_2 : \omega,$$

plyne:

$$\frac{r_1 \omega_1}{\sin \mu} = \frac{r_2 \omega_2}{\sin \nu} = \frac{r \omega}{\sin (\mu + \nu)}, \tag{3}$$

což bylo dokázati.

Supponujme nyní, že ω_1 a ω_2 znamenají dvě úhlové rychlosti, jimž nějaké těleso podléhá. Libovolný bod P tohoto tělesa dozná následkem úhlové rychlosti ω_1 rychlost $v_1 = \omega_1 r_1$ kolmou na rovinu $(r_1 \omega_1)$ a podobně následkem úhlové rychlosti ω_2 rychlost $v_2 = \omega_2 r_2$ kolmo na rovinu $(r_2 \omega_2)$. Rychlost výslednou v bodu P obdržíme jakožto diagonálu rovnoběžníka rychlostí v_1 a v_2. Z tohoto rovnoběžníka plyne:

$$\frac{r_1 \omega_1}{\sin u} = \frac{r_2 \omega_2}{\sin z} = \frac{v}{\sin (\mu + \nu)},$$

neboť patrně $\sphericalangle\, u + z = \sphericalangle\, \mu + \nu$, poněvadž strany prvého úhlu stojí kolmo na stranách druhého a současně všechny čtyři stojí kolmo na přímce OP. Porovnáme-li tuto rovnici s rovnicí (3) a všimneme si vztahu $u + z = \mu + \nu$, plyne bezprostředně

$$u = \mu, \quad z = \nu \quad \text{a} \quad v = r\omega.$$

Z toho plyne, že výsledná rychlost v stojí kolmo na rovině (r, ω) a že odpovídá velikostí i směrem úhlové rychlosti ω, kterou jsme z daných úhlových rychlostí ω_1 a ω_2 obdrželi konstrukcí rovnoběžníkovou.

Poznámka. Že z rovnic

$$\frac{r_1\omega_1}{sin\ \mu} = \frac{r_2\omega_2}{sin\ \nu},\quad \frac{r_1\omega_1}{sin\ u} = \frac{r_2\omega_2}{sin\ z}\quad \text{a}\quad u + z = \mu + \nu$$

plyne $u = \mu$ a $z = \nu$, můžeme přímo dokázati následovně:

Z uvedených rovnic obdržíme:

$$sin\ u : sin\ z = sin\ \mu : sin\ \nu$$

čili

$$\frac{sin\ u + sin\ z}{sin\ u - sin\ z} = \frac{sin\ \mu + sin\ \nu}{sin\ \mu - sin\ \nu},$$

$$tg\ \tfrac{1}{2}(u + z)\ cot\ \tfrac{1}{2}(u - z) = tg\ \tfrac{1}{2}(\mu + \nu)\ cot\ \tfrac{1}{2}(\mu - \nu).$$

Ježto však

$$u + z = \mu + \nu,$$

je též

$$u - z = \mu - \nu,$$

to jest

$$u = \mu,\quad z = \nu.$$

Věstník literární.

Recense knih.

K. Osovský: **Čtyřmístné tabulky logarithmické a trigonometrické.** Praha, Jednota českých mathematiků, 1909, (stran 28). Cena 60 h.

Při četných výpočtech praktických vystačíme úplně s čísly čtyřcifernými a tudíž i při příslušném počítání logarithmickém s logarithmy čtyřcifernými. Se zřetelem k malým rozměrům čtyřciferných tabulek jeví se účelným při takovýchto výpočtech užívati tabulek log. čtyřciferných. Že mimo to současné užívání