August Seydler

Historický rozvoj problému tří těles. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 3, 102--114

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121442`

dřuje jednoduchým zlomkem, jehož čitatele představuje determinant, mající za prvky součinitele binomické, a jmenovatelem jest číslo faktorialní.*)

Historický rozvoj problemu tří těles.

Podává

A. Seydler.

(Dokončení.)

Co se předně prací souborných týče, budiž uveden obšírný spis *Pontécoulantův*: Théorie analytique du système du monde; 4 sv. (1829—46). Jest to ať tak díme parafrase díla Laplaceova, podávajíc tutéž látku, spracovanou však způsobem modernějším, na základě novějších a částečně elegantnějších method analytické mechaniky. Studium všeobecné části (prvních dvou dílů) odporučuje se z té příčiny pro začátečníky lépe nežli pracné studium Laplaceovy mechaniky nebeské, jejíž genialný autor co pravý pionér vědy si takřka sekerou klestí dráhu skrze prales mathematických obtíží téměř nepřekonatelných.

Stručnější a při tom přece (alespoň v hlavních rysech) úplný jest *Resalův* spis: Traité élémentaire de mécanique céleste (I. vyd. 1865, II. vyd. 1884), jenž tudíž poskytuje nejlepší úvod pro začátečníka. Zejmena druhé vydání, valně rozšířené, vyniká upotřebením method nejnovějších, předpokládajíc ovšem u čtenáře nenepatrné vědomosti mathematické a mechanické.**) Rovněž zasluhují zmínky *Airy-ho*: Mathematical tracts on physical Astronomy (1826; 1831; 1842). Kdo hledá pro poučení své cestu ještě pohodlnější, sáhne ke spisu *Möbiusově*: Die Elemente der Mechanik des Himmels auf neuem Wege, ohne Hülfe höherer Rechnungsarten, abgeleitet (1843).

Uvedené zde spisy — vyjma Pontécoulantův, jenž však není prost různých výtek — neposkytují však celkem nic nového, neznamenají pokrok ve vědě, nýbrž jen více méně zdařilý výklad

*) O jiných výrazech determinantních viz *Studnička* „O počtu differencialním" II. vyd. pag. 121, kdež: vzorec (6) bez důkazu jest uveden.

**) Obšírnější posouzení téhož spisu podáno v Athenaeum, r. III. str. 19.

známých věcí. Obrátíme se nyní k důležitějším publikacím, jimiž věda posunuta jest ku předu.

A tu ve směru Lagrangem a Laplacem zahájeném první pokrok zaznamenáváme v pracích *Hansenových*; nová jest zde myšlenka, učiniti čas závislou proměnnou. Pravá délka dráhy rušené jest týmž úkonem času rušeného, jakým jest délka dráhy elliptické úkonem času prostého. Hlavní práce Hansenovy jsou:

Disquisitiones circa theoriam perturbationum quae motum corporum coelestium afficiunt (Astr. Nachr. sv. VII. 1829, sv. VIII. 1831, sv. XI. 1834).

Theoria generalis perturbationum corporum coelestium (Astr. Nachr. sv. XI. 1834).

Expositio novae tabularum motum planetarum heliocentricum exhibentium formae (Astr. Nachr. sv. XIII. 1836).

Práce dosud uvedené týkaly se hlavně integrování přibližného těch rovnic differencialných, které rušivý pohyb vyjadřují, a jichž *přesné* integrování dosud jest naprostou nemožností. V rovnicích těch vyskytuje se t. zv. *rušivý úkon* (Störungsfunction, fonction perturbatrice), jehož částečné differencialné poměry dle jednotlivých souřadnic určují tu část celého urychlení pohybující se hmoty, která je podmíněna vlivem rušivých hmot a která by se tudíž rovnala nule, kdyby těchto hmot nebylo. Všeobecný výraz pro tento úkon velmi snadno sestrojíme; při výpočtu, t. j. při zmíněném přibližném integrování jest však nutno, rozvinouti jej přiměřeným způsobem. Pro ten případ, že jsou sklony a výstřednosti elliptických dráh velmi nepatrné — zkrátka, pro případ oběžnic (alespoň osmi hlavních) rozvinuje se týž úkon dle stoupajících mocností těchto veličin, aby takto zjednána byla konvergentní řada.

Dotyčné výpočty vyskytují se již u Lagrange-e a u Laplace-e; rostoucí dokonalost pozorování a snaha po docílení vždy většího souhlasu jeho s výpočtem nutkala však k výpočtům vždy rozsáhlejším, a tak nalezáme v *Burckhardtově* pojednání: Formules générales pour les perturbations de quelques ordres supérieurs (Mém. de l'Inst. de France, sv. IX. 1808) úkon rušivý rozvinutý až do členů závislých na 6. mocnosti výstřednosti. Ještě dále šel *Leverrier* ve svých slavných *Recherches astronomiques* (Mém. de l'Obs. de Paris, sv. I. 1855, sv.

II. 1856). Zde jest úkon rušivý (alespoň hlavní jeho část) určen až po členy 7. stupně. Aby zřetelněji se objevila obrovská práce s výpočtem tím spojena, připomínám, že obsahuje úkon takto rozvinutý 148 členů s 469 koefficienty, k jichž snadnějšímu sestrojeno jest 154 pomocných úkonů, které však opět obsahují mnoho numerických koefficientů. *)

Při této nesmírné úloze nemůžeme se tudíž diviti, že velká píle věnovala se pokusům, usnadniti je a nalézti jednoduché a pohodlné způsoby rozvinutí úkonu rušivého. Sem patří celá řada výzkumů, provedených nejčelnějšími mathematiky našeho století, z nichž uvádím jen jmena: *Bessel, Carlini, Poisson, Lubbock, Hansen, Jacobi* a *Cauchy*, jichž práce podrobně vypočítávati zde nelze.

Budiž pouze připomenuto, že v nejnovější době vždy patrnější se jeví snaha, užíti k účelu naznačenému též elliptických funkcí, které pro velkou svou ať tak díme plasticitu (transformabilitu) vynikají nad samé úkony goniometrické, jež ostatně jsou jen zvláštním případem jejich. V té věci razil dráhu švédský astronom *Gyldén*, a nalezl již četných následovníků; v. článek jeho v Journ. de Math. (3), sv. II. r. 1876: Extrait d'une lettre rela-

---

*) Aby si čtenář alespoň poněkud mohl představiti *objem* úlohy zde naznačené, uvedu onu část rušivého úkonu R, která jest závislá na první mocnosti výstředností e a e' dráh obou těles, rušeného a rušícího:

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = & -\frac{a}{a'^2}\cos(l'-\lambda) + \frac{3}{2}\frac{a}{a'^2}e\cos(l'-\omega) - \frac{1}{2}\frac{a}{a'^2}e\cos(l'-2\lambda+\omega) \\ & -2\frac{a}{a'^2}e'\cos(2l'-\lambda-\omega') + \tfrac{1}{2}\Sigma \mathrm{A}^{(i)}\cos(il'-i\lambda) \\ & -\frac{e}{2}\Sigma\left\{2i\mathrm{A}^{(i)} + \mathrm{A}_1^{(i)}\right\}\cos[il'-(i-1)\lambda-\omega] \\ & +\frac{e'}{2}\Sigma\left\{(2i+1)\mathrm{A}^{(i)} + \mathrm{A}_1^{(i)}\right\}\cos[(i+1)l'-i\lambda-\omega]. \end{aligned}$$

Členů opatřených znamením součtu Σ musí se vzíti tolik, až se v řadě veličin $\mathrm{A}^{(0)}, \mathrm{A}^{(1)}, \mathrm{A}^{(2)} \ldots \mathrm{A}_1^{(0)}, \mathrm{A}_1^{(1)}, \mathrm{A}_1^{(2)} \ldots$ dojde ku členu $\mathrm{A}^{(i)}$ neb $\mathrm{A}_1^{(i)}$ tak malému, že jej lze vynechati. Veličiny ty, útvořené z polos a a a' dráh obou těles, stávají se totiž s rostoucí příponou i stále menšími. Uvedené tři součty jsou 3 z oněch 469 shora zmíněných koefficientů, a to právě ty nejjednodušší, takové, jichž numerický výpočet (v konkretních případech) nejrychleji jest ku konci přiveden!

tive à l'application des fonctions elliptiques à la théorie des perturbations; a v Astr. Nachr., sv. C, 1881: Über die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper.

Po rozvoji rušivého úkonu jeví se co další a hlavní úloha astronomického počtáře, vyhledati integrováním příslušných rovnic differecialných perturbace samy; a tu zvláště dlužno přihlednouti k variacím sekularným pro jich význam v mechanice nebeské. Ačkoli o předmětu tom ve spisech dříve uvedených, zejmena v encyklopedické Mécanique céleste obšírně jest pojednáno, musíme ještě jednou k němu se vrátiti. Po prvních pokusech Eulerem a Lagrangeem (viz zhora uvedená pojednání) učiněných uvedl *Laplace* první výrazy pro tyto variace na jejich tvar nejjednodušší v memoiru: Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes, qui en dépendent (1772).

Později obrátil *Lagrange* znova pozornost svou k tomuto předmětu a zpracoval jej důkladně ve dvou pojednáních: Théorie des variations séculaires des éléments des planètes: 1. Principes et formules générales pour déterminer ces variations: 2. Détermination de ces variations pour chacune des planètes principales (Berlin, Mém. 1781, 1782; Lagrange, Oeuvres t. V).

S theorií variací sekularných úzce souvisí otázka *stability* slunečné soustavy naší, t. j. otázka, zda-li soustava ta vlastním pohybem svých členů nezmění se způsobem, který by ohrožoval trvání její. *Laplace* objevil již r. 1772 důležité faktum, že jsou v soustavě naší střední pohyby, tedy i doby oběhů jednotlivých oběžnic a dle třetího zákona Keplerova též osy dráh jejich veličiny nepromĕnné: Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes (Paris, Hist. de l'Acad. des Sc. 1772).

Tato práce byla však jen zárodkem dalších pokusů k zjištění stability soustavy slunečné; Laplace obmezuje se v ní na členy prvního stupně ohledně sil rušivých a na členy prvního a druhého stupně ohledně výstředností a sklonů, a dokazuje se zřetelem k nim, že jsou variace středních pohybů jen periodické. Důležitým pokrokem bylo, když *Lagrange* dokázal, že platí ona (sekularní) nepromĕnnost středních pohybů při rozvoji jdoucím až k jakémukoli stupni ohledně výstředností a sklonů: Sur l'altération des moyens mouvements des planètes (Berlin, Mem. 1776; Oeuvres, t. IV). Další pokrok učinil *Poisson*, dokázav, že platí neproměnnost středních pohybů i tehdy, máme-li zřetel ku druhým mocnostem a součinům rušivých hmot: Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes (Journal de l'Ec. polyt. t. VIII. 1809). Ano v druhém pojednání: Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique (Mém. de l'Acad. des sciences, Paris, I, 1816) pokouší se *Poisson* o to, dokázati onu neproměnnost i vzhledem ku třetím mocnostem rušivých hmot. Důkaz jeho není však úplný, a otázka sama nalezá se do dneška na tomto stupni. Proti tvrzení a důkazu *Maurice-ově*, že ona neproměnnost platí pro všechny mocnosti rušivých hmot (Comptes rendus, t. XV, 1842) ozvali se *Liouville* a *Wantzel* (tamtéž); vedle pojednání *Mathieu-ova*, dle něhož ona neproměnnost alespoň vzhledem k třetím mocnostem hmot jest zaručena (Comptes rendus, t. LXXIX, 1874) máme rozbor, kterým hledí *Haretu Spiru* dokázati, že již při ohledu na třetí mocnosti neplatí ona neproměnnost více (tamtéž, sv. LXXXV, 1877).

Neproměnnost velkých os (přibližně) elliptických drah není však jedinou nutnou zárukou pro stabilitu naší soustavy; také výstřednosti a sklony těchto drah nemohou se přes jisté meze měniti, nemají-li nastati poměry ohrožující další trvání alespoň některých částí soustavy té. Možnost srážek mezi jednotlivými oběžnicemi na př. zajisté by nebyla vyloučena, kdyby výstřednosti jejich drah byly tak značné, jak je vidíme při drahách vlasatic. Také v tomto ohledu jest stabilita naší soustavy alespoň v mezích vzhledem k neproměnnosti středních pohybů již uvedených zaručena. Již Laplace uvádí následující dvě rovnice, z nichž jde na jevo, že se mohou výstřednosti a sklony drah těch oběžnic, jichž hmota jest poněkud značnější, zkrátka hlavních oběžnic — a jen tyto oběžnice mají význam pro stabilitu naší soustavy — měniti jen v úzkých mezích a nabýti tudíž jen nepatrných hodnot maximalných, jinými slovy, že dráhy týchž oběžnic *vždy* budou ellipsy od kružnic *velmi málo* rozdílné a k jakési pevné rovině v *malém úhlu* nakloněné:*)

*) Srv. článek můj v našem Časopisu r. XIII. str. 139.

$$\text{I.}\quad m\sqrt{a}\,e^2 + m'\sqrt{a'}\,e'^2 + m''\sqrt{a''}\,e''^2 + \ldots = \text{Const.}$$

$$\text{II.}\quad m\sqrt{a}\,tg^2 i + m'\sqrt{a'}\,tg^2 i' + m''\sqrt{a''}\,tg^2 i'' + \ldots = \text{Const.}$$

Zde jsou $m, m', m'' \ldots$ hmoty, $a, a', a'' \ldots$ příslušné polosy dráh, $e, e', e'' \ldots$ výstřednosti a $i, i', i'' \ldots$ sklony dráh. Druhé odmocniny jsou vesměs stejně označené, pohybují-li se všechny oběžnice v témž směru, což se v naší soustavě sluneční v skutku vyskytuje; vypočítáme-li stálou hodnotu součtu I. neb II. pomocí hodnot $e, e', e'' \ldots$ pro jistou dobu platných, poznáváme, že nemůže míti na př. e nikdy větší hodnotu nežli kterou bychom obdrželi kladouce všechny členy řady I. vyjma první člen rovny nule.

Jinak bylo by, kdyby oběžnice v nestejných směrech kolem slunce obíhaly; pak by v řadách I. a II. byly vedle členů kladných i záporné a hodnota jejich absolutní mohla by jakkoli vzrůsti, aniž by podmínky rovnicemi uložené byly porušeny, t. j. výstřednosti a sklony mohly by obdržeti jakkoli velké hodnoty. Rovněž mohou býti výstřednosti a sklony značnějšími tehdy, je-li hmota nepatrná, jak vidíme při asteroidách.

Jednajíce o stabilitě naší sluneční soustavy, nemůžeme mlčením opominouti důležitou vlastnost její z všeobecných principů mechanických plynoucí, totiž existenci *nepromĕnné roviny*. Vyhledejme rovinu, pro kterou jest součet průmětů všech plošných rychlostí násobených příslušnými hmotami maximum (zároveň konstantou); rovina ta podrží vždy tutéž polohu v prostoru, t. j. normala její jest stále namířena k témuž bodu na obloze. Objevení roviny této oznámil *Laplace* v pojednání: Sur la détermination d'un plan qui reste toujours parallèle à lui-même, dans le mouvement d'un système de corps agissant d'une manière quelconque les uns sur les autres et libres de toute action étrangère (Journ. de l'Éc. polyt. II. 1798). Velmi důležitou opravu přičinil *Poinsot*, ukázav, že dlužno zřetel míti též k rotaci slunce a oběžnic, jakož i k pohybu družic kolem oběžnic; viz jeho Élements de statique, vydání z r. 1837.

Co se variací sekularných týče, k nimž se ještě na chvíli vrátiti musíme, tu po pracích Laplaceových a Lagrangeových nejdůkladnější rozbor podal *Leverrier*, na několika místech, zejmena však v uvedených již Mémoires de l'Observatoire de

Paris, ve svazku druhém (1856). Rozsáhlý výpočet těchto variací tím se liší od výpočtu perturbací periodických, že nelze *po sobě* v úvahu vzíti působení jedné, druhé atd. rušivé hmoty, nýbrž současně vzájemné působení hmot všech, tak že máme před sebou, obmezíme-li se na hlavní oběžnice, v skutku problem 9 těles, aneb zanedbáme-li Neptuna, jak Leverrier ve vytknuté práci byl učinil, problem 8 místo problemu 3 těles. Obdržíme pro každý element soustavu tolika soudobých rovnic, mnoho-li těles kolem centralného tělesa obíhá, tedy 8 neb 7; při čemž se kombinují výstřednosti a délky perihelia v jednu, sklony a délky uzlu v druhou skupinu (v. str. 11.). Numerické provedení výpočtů přesahovalo by snad sílu a čas jediného počtáře, kdyby si nebyl mohl Leverrier usnadniti práci tím, že pro skupinu větších oběžnic (Jupitera, Saturna, Urana) provedl výpočet zvlášť, jako by menších (vnitřních) oběžnic nebylo, čímž obdržel pro první skupinu již velmi přibližné hodnoty variací sekularných.

Aby čtenáři alespoň poněkud objem prací ve výpočtech těch obsažených na mysl byl uveden, podám zde dle Leverriera výrazy pro výstřednost e a délku perihelia Π dráhy naší Země, aneb výrazy pro aequivalentní veličiny:

$$h = e \sin \Pi, \quad l = e \cos \Pi.$$

Všeobecný tvar výrazů pro tyto veličiny (pro jakoukoli oběžnici) jest:

$$h = N \sin (gt + \beta) + N_1 \sin (g_1 t + \beta_1) + \ldots + N_6 \sin (g_6 t + \beta_6),$$
$$l = N \cos (gt + \beta) + N_1 \cos (g_1 t + \beta_1) + \ldots + N_6 \cos (g_6 t + \beta_6),$$

členů v každém výrazu jest tolik, mnoho-li oběžnic v jejich vzájemném působení v úvahu bereme. Konstanty g, β mají pro všechny oběžnice tutéž hodnotu; koefficienty N pro každou oběžnici hodnotu jinou; tak že nutno určiti při n oběžnicích $n(n+2)$, při sedmi na př. 63 konstant. Veličiny g jsou kořeny rovnice n-tého (na př. 7.) stupně; po vyhledání jich určíme *poměry* čísel N podobně jako po vyhledání hlavních os ellipsoidu ze známé rovnice 3. stupně jejich cosinusy směrné. Absolutní hodnoty poskytuje nová rovnice. Pro naši zemi jest:

$N = 0{,}000526$	$g = 2'',25842$	$\beta = 126^\circ 43' 15''$
$N_1 = 00{,}16611$	$g_1 = 9{,}71364$	$\beta_1 = 27^\circ 21' 26''$
$N_2 = 0{,}002366$	$g_2 = 22{,}4273$	$\beta_2 = 126^\circ 44' 8''$
$N_3 = 0{,}010622$	$g_3 = 5\,2989$	$\beta_3 = 85^\circ 47' 45''$
$N_4 = -0{,}018925$	$g_4 = 7{,}5747$	$\beta_4 = 35^\circ 38' 43''$
$N_5 = 0{,}011782$	$g_5 = 17{,}1527$	$\beta_5 = 334^\circ 48' 27''$
$N_6 = -0{,}016913$	$g_6 = 17{,}8633$	$\beta_6 = 314^\circ 31' 1''$.

Avšak řada čísel g a β platila by pouze tehdy, kdyby hmoty oběžnic byly úplně známy; jelikož tomu není, dlužno ku *každému* g a ku každému β připojiti řadu n (ku př. 7) členů, obsahujících vedle numerického koefficientu *neznámou* určující opravu, kterou dlužno připojiti k hmotě dosud přijaté, abychom obdrželi správnější pro ni hodnotu. Konečný výsledek obsahuje tudíž vlastně n (7) neznámých, které určíme porovnávajíce sekularné změny vypočítané s pozorovanými, ovšem teprvé snad po stoletích.

Podobný výsledek platí též pro druhou skupinu elementů: sklony a délky uzlů.

Nutnou podmínkou pro stabilitu naší soustavy jest, aby všechny kořeny oné rovnice n-tého (7.) stupně pro g v obou případech (t. j. pro výstřednosti i pro sklony) byly realné, což se v skutku objevuje.

Největší výstřednosti uvedených 7 oběžnic jsou dle Leverriera uzavřeny v mezích:

Merkur:	0,225 ... 0,229,
Venuše:	0,070 ... 0,090,
Země:	0,060 ... 0,080,
Mars:	0,139 ... 0,144,
Jupiter:	0,061 ... 0,062,
Saturn:	0,0847... 0,0851,
Uranus:	0,064 ... 0,065.

Že nelze udati přesnou pro ně hodnotu, leží právě v nedostatečné známosti hmot, při čemž se u vnitřních oběžnic vliv ten jeví mnohem důrazněji.

Výstřednost dráhy zemské (obnášející nyní 0,0066) se stále zmenšuje, až dosáhne po 23980 letech nejmenší hodnotu 0,003314, načež opět poroste.

Podrobný rozbor svůj, v němž pro vnější oběžnice byl v úvahu vzal též členy třetího stupně ohledně sklonů a výstředností, končí Leverrier těmito pozoruhodnými slovy:

„Zdá se býti nemožným, abychom pomocí methody postupných approximací rozhodli, zda-li soustava slunečná se zřetelem ku členům druhé approximace po čas neobmezeně dlouhý stabilitu svou zachová; a jest sobě přáti, aby poskytli mathematikové integrováním dotyčných rovnic differencialných prostředky k řešení těchto obtíží.“

Později vyplnil Leverrier mezeru, již byl v uvedených právě výpočtech zanedbáním Neptuna zanechal, alespoň z části, podav sekularné variace pro soustavu všech (čtyř) vnějších oběžnic v Mémoires de l' Obs. de Paris, t. XI. 1876. V týchž memoirech, ve sv. IV. V. VI. podal Leverrier podrobnou theorii pohybů vnitřních, a ve sv. XI. XII. XIII. vnějších oběžnic, vykonav takto dílo, které rozsáhlostí výpočtů a důkladností výsledků přesahuje samu Laplaceovu Mécanique céleste a důstojně se jí po bok staví jakožto pokračování její, opírající se o nejnovější vymoženosti mathematiky.

Fenomenalní intensita rozumu a vůle, sloučená v Leverrierovi, činí pochopitelným, že na samém takřka počátku své vědecké karriery s pérem v ruce objevil *Neptuna* *) (r. 1846), v kterémž výkonu měl však důstojného soupeře v mladistvém *Adamsovi*. Že však ve věci té rozmarná Štěstěna též jakési účastenství měla, dokazuje neúspěch domněnky Leverrierovy o existenci intramerkurialné oběžnice, obdrževší ještě před objevením svým přiměřené jméno Vulkán.

Zbývá nám ještě důležitá kapitola z astronomické části problemu tří těles: theorie pohybu naší Luny. Byly sice z počátku již uvedeny práce Newtonovy, Clairautovy a Mayerovy; později zaujala nás však cele theorie pohybu oběžnic, jejíž výklad jsem nechtěl přerušovati, tak že se nyní opět vrátiti musíme k dobám vzdálenějším. A tu se druží ku jmenovaným již astronomům opět *Euler* svým pojednáním: Théorie de la Lune et spécialement sur l' équation séculaire (Paříž, Recueil des mém. 1777) a samostatně vydanou prací: Theoria motuum Lunae

*) V. článek můj v ročníku III. Časopisu: O vypočítání Neptuna.

(Petropoli, 1772), jakož i *Melanderhjelm* a *Frisi* podobného obsahu spisem (1766, 1782).

Netřeba zvláště připomínati, že doznala theorie pohybu Luny v Laplaceově Mécanique céleste výkladu obšírného (viz str. 69), přece však nestačil všem potřebám výklad ten a bylo v oboru tom ještě spíše nežli při oběžnicích potřebí důkladnějšího spracování, by pozorování s výpočtem v souhlas bylo uvedeno. Příčinou toho jest, jak již podotknuto (str. 14), že rušivý vliv slunce při pohybu měsíce kolem země mnohem jest značnější a také jiným poněkud způsobem se jeví, nežli vzájemné rušení oběžnic. Z prací v ohledu tom podniknutých stůjtež zde tyto:

J. Plana: Théorie du mouvement de la Lune (Turin, 1832); tři objemné svazky.

J. W. Lubbock: On the theory of the Moon, and on perturbations of the planets (London, 1850).

C. Délaunay: Théorie du mouvement de la Lune (Paris, 1860—1867). Dva silné kvartové svazky, jež obsahují, jak se zdá, nejlepší dosud theorii pohybu měsíce. O objemu výpočtů zde obsažených učiněna již dříve (str. 14.) poznámka.

P. A. Hansen: Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen (Abh. d. Ges. d. Wiss. in Leipzig, VI. 1863, VII. 1864).

V práci té podán jest výklad výpočtů, jež sloužily Hansenovi při vzdělání jeho velkých, britskou admiralitou vydaných:

Tables de la Lune construites d'après le principe newtonien de la gravitation universelle (Londre 1857).

Tabule ty slouží do dnešního dne k vypočítání efemerid pohybu měsíčního, obsažených v různých ročnících astronomických (Nautical Almanac, Connaissance de temps, Berliner Astronomisches Jahrbuch).

J. A. Weiler: Über das Problem der drei Körper im Allgemeinen und insbesondere in seiner Anwendung auf die Theorie des Mondes. — Grundzüge einer neuen Störungstheorie und deren Anwendung auf die Theorie des Mondes. Tvoří III. a XII. díl publikací lipské astronomické společnosti (1866, 1872).

G. B. Airy: First part of numerical lunar theory (Greenwich Astr. Obs. 1875).

J. N. Stockwell: Theory of the Moon's motion. (Philadelphia 1875.)

Velmi záhadnou část theorie pohybu Luny tvoří t. zv. *sekularná accelerace* středního pohybu. *Halley* poznal r. 1693, zkoumaje pozorování Luny od Albategnia, že nutno připojiti k délce člen závislý na čtverci času, což by znamenalo právě, že průměrná rychlost, s jakou se měsíc pohybuje, doznává časem zvětšení, čili že se v pohybu tom jeví urychlení. Teprv *Laplace* objevil (1876) pravděpodobnou příčinu záhadného tohoto úkazu. Výstřednost dráhy zemské zmenšuje se nyní, a okolnosť ta má za následek urychlení středního pohybu Luny a sekularnou variaci délky perigea i uzlu. Avšak accelerace není v skutku tak značná, jak ji byl Laplace výpočtem nalezl. Delaunay (Comptes rendus, LXI, 1865) kloní se k domněnce, že prodloužení rotační doby naší země, způsobené přílivem a odlivem mořským, tento rozdíl mezi theorií a pozorováním vysvětluje. Do dnešního dne není však otázka ta, s kterou se zanášelo velmi mnoho astronomů-mathematiků tohoto století (Plana, Delaunay, Main, Hansen, Pontécoulant, v nejnovější době zejmena Puiseux, Newcomb, Airy, Adams) bezpečně řešena.

Konečně musím pronésti několik slov o ryze abstraktním problemu tří těles. Řešení problemu pohybu *jakýchkoli* tří vzájemně gravitujících hmot má též interess astronomický, hledíme-li k pohybu dvou- a trojhvězd, jichž pozorování poskytne po delší řadě let mnohou záhadu theoretické astronomii; prozatím můžeme však na úlohu tu pohlížeti hlavně ze stanoviska mathematického, jakožto na obtížný problem integrování soudobých rovnic differencialných. Vyžadujeť řešení všeobecného problemu tří těles integrování 9 soudobých rovnic druhého aneb 18 soudobých rovnic prvního řádu; všeobecné principy mechaniky poskytují nám 10 integralů těchto rovnic: princip středu hmotného 6, princip ploch 3, princip živé síly 1. Zbývá nám tudíž ještě vyhledání 8 integralů. Ve věci té zaznamenáváme jedno z nejkrásnějších pojednání Lagrangeových: Essai sur le problème des trois corps (Prix de l'Ac. Roy. des Sc. de Paris, t. IX 1772; Oeuvres, t. VI). Řadou obtížných a o sobě již velmi zajímavých transformací zjednává si Lagrange soustavu tří differencialných rovnic, obsahujících mimo čas co základní proměnnou pouze vzájemné vzdálenosti r, r', r'' přitahujících se těles, tak že jest problem uveden na určení trojúhelníku tělesy těmi utvořeného. Rovnice ty jsou zdánlivě druhého, v skutku však třetího řádu, obsahujíce pomocnou proměnnou, kterou jen differencováním rovnice bylo by lze odstraniti; zastupují tudíž 9 diff. rovnic řádu prvního. Avšak:

Předně poskytuje princip živé síly jeden integral i v tomto případě, poněvadž lze rovnici pomocí něho nalezenou přeměniti tak, že obsahuje mimo čas též jen r, r', r'', že tudíž zastupuje jeden integral nalezené soustavy rovnic.

Za druhé podařilo se Lagrange-ovi nalézti rovnici, která jest aequivalentem druhého integralu, tak že zbývá pouze 7 integralů neznámých.*) V této okolnosti záleží cena práce Lagrangeovy. Od těch dob nebyl, přes všechny jinak velmi důležité práce a výzkumy Bourovy, Jacobi-ho a jiných, učiněn další pokrok ve směru tom, t. j. nebyl nalezen žádný nový integral. Jacobi-ho princip posledního multiplikatoru dovolil by nám ovšem vypočítati *sedmý* z hledaných integralů, kdybychom znali již ostatních *šest*; jeví se nám tudíž pouze co poukázka mající cenu pro budoucnost, nikoli však pro přítomnost.

Přehlížíme-li všechny dosud jak v zjednodušeném astronomickém tak ve všeobecném mathematickém problemu tří těles učiněné pokroky, musí nás obdivem naplniti *jednak* neobyčejná složitost úkazů přírodních, která do problemu na oko tak jednoduchého tolikeré vložila obtíže, jakmile se jedná o podrobnější rozbor jednotlivostí, *jednak* i mohutnost ducha lidského, jenž obtíží jejich se nelekaje k bystrosti pojí železnou vytrvalost k překonání jich. Z druhé strany poznáváme však, jak mylný jest náhled těch, kteří v astronomii a zejmena v mechanice nebeské spatřují vědu, jež dokončila běh svůj a které nezbývá než některé konstanty lépe a spolehlivěji určiti, čímž úkol její pro celou budoucnost jest vyčerpán. Nikoli: zdá se, že stojíme dosud na samém prahu velkolepé té vědy; ohromná práce, potřebná k dosažení výsledků poměrně nepatrných zdá se, že dokazuje nutnost nových cest, ano po starých dostíženo vše, k čemu vůbec tímto způsobem bylo lze dospěti. A vždy

*) Srv. mé pojednání v Zas. Zpr. kr. č. Spol. nauk ze dne 26. června 1885.

více razí sobě přesvědčení dráhu, že především nutno, vedle nejjednodušších úkonů, zejmena goniometrických, posud výhradně užívaných, sáhnouti k jiným, na oko nepřístupnějším, problemu danému však přiměřenějším; že nutno studovati úkony differencialnými rovnicemi definované a obeznámiti se s jejich vlastnostmi. Podobné myšlénky pronáší Gyldén v nejnovější práci své o problemu tří těles (Acta mathematica, v. I), když byl dříve již s jinými se přičinil o zavedení elliptických úkonů do mechaniky nebeské (v. str. 104). Doufejme, že se spojenému úsilí tolika vynikajících mathematiků a astronomů podaří nalézti novou bohatou žílu hojně se prýštících vědomostí v době, kdy starší přese všechno úsilí nenese již užitek tak bohatý jako při prvním objevení svém!

O přímce Simsonově.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.

Ku vlastnostem přímky Simsonovy obsaženým ve drobných zprávách na str. 125. dodávám tuto některé další, které snad jsou nové; nemohl jsem zvěděti, zda kde byly uveřejněny.

1. Užívajíce téhož označení jako na místě uvedeném, mějme přímku Simsonovu M příslušnou bodu m, který jest na kružnici K o trojúhelník abc opsané.*) Úhel, jejž tato přímka se stranou $\overline{ab}$ tvoří, jmenujme λ; jelikož o čtyrúhelník $ab'mc'$ lze opsati kružnici, jest patrně

$$R - \lambda = \sphericalangle b'c'm = \sphericalangle cam,$$

t. j. úhel utvořený přímkou M a některou stranou základního trojúhelníka jest doplňkem úhlu obvodového sestrojeného v kruhu K nad obloukem obsaženým mezi bodem m a vrcholem ležícím proti oné straně.

Jsou-li tedy dány na kružnici K dva libovolné body m_1, m_2, a tvoří-li příslušné přímky M_1, M_2 se stranou $\overline{ab}$ úhly λ_1, λ_2, jest

$$R - \lambda_1 = \sphericalangle cam_1, \quad R - \lambda_2 = \sphericalangle cam_2$$

---

*) Čtenář račiž sobě sestrojiti příslušný obrazec.