Alois Strnad

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 3, 125–132

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121434

Drobné zprávy.

Podává

A. Strnad,
professor v Hradci Králové.

Přímka Simsonova. Spustíme-li s bodu m, který jest na kružnici K opsané o trojúhelník abc, kolmice ku stranám jeho, leží paty $a,' b,' c'$ kolmic těchto v jediné přímce M; přímka taková slove *přímkou Simsonovou.**) Každému bodu kružnice K náleží vzhledem ke trojúhelníku danému určitá přímka Simsonova. Veškeré takové přímky obalují křivku 4. stupně a 3. třídy, která má 3 body úvratu. Je-li trojúhelník pravidelný, jest křivka tato hypocykloida, již vyšetřoval *Steiner* a po něm *Cremona.* (Crelle: Journal. 53. Bd. p. 231, 64. Bd. p. 102).

Přímkou S. zabývali se v poslední době *Goffart*, *Weill*, *van Aubel, Greiner* a j.; vyzkoumali některé zajímavé vlastnosti, které jsme tuto sestavili.

Přímka M jest stejně vzdálena od bodu m i od průsečíku v výšek trojúhelníka abc; prochází tudíž bodem n, ve kterém přímka $\overline{vm}$ protíná kružnici 9ti bodů v trojúhelníku abc. (Kružnice tato L, o níž jedná článek Dra. *Em. Weyra* ve II. ročníku tohoto Časopisu, str. 190., obsahuje středy a_1, b_1, c_1 stran trojúhelníka abc, paty výšek jeho a_2, b_2, c_2 a body a_3, b_3, c_3 půlící vzdálenosti bodu v od vrcholů.)

Kolmice bodem m ku stranám trojúhelníka abc spuštěné stanoví v kružnici K body $a+$, $b+$, $c+$ tak, že jest

$$aa+ \parallel bb+ \parallel cc+ \parallel \mathrm{M}.$$

Průmět kterékoli strany trojúhelníka abc do M rovná se části této přímky obsažené mezi oběma ostatními stranami; ku př. průmět $ab = a'b'$.

Je-li $m_1\, m_2$ průměrem kružnice K, jsou přímky Simsonovy příslušné bodům m_1, m_2 kolmy na vzájem a průsečík jich nalezá se na kružnici L; přímky ty jsou asymptotami pravoúhlé hyperboly jdoucí body a, b, c, v.

Přímky Simsonovy vrcholů jednoho z trojúhelníků $a_1\, b_1\, c_1$, $a_2\, b_2\, c_2$ vzhledem ke druhému a naopak vrcholů druhého vzhledem

*) Rob. Simson, proslulý restaurator Porismat Euclidových a Míst Apolloniových, žil v letech 1687—1768.

k prvému protínají se v jediném bodě o, který jest průsečíkem výšek v trojúhelníku $a_4 b_4 c_4$ omezeném přímkami Simsonovými bodů a_3, b_3, c_3 vzhledem k trojúhelníku $a_2 b_2 c_2$. Trojúhelníky abc, $a_4 b_4 c_4$ jsou homologické, majíce středem homologie těžiště trojúhelníka $a_2 b_2 c_2$.

Jsou-li dány na kružnici K body a, b, c, d a sestrojíme-li ke každému z nich přímku Simsonovu vzhledem k trojúhelníku ostatními třemi body určenému, mají čtyry tyto přímky společný průsečík p; jsou-li body a, b, c stálé, a mění-li bod d své místo na kružnici K, jest geom. místo bodu p kružnice devíti bodů trojúhelníka abc.

(Nouvelles annales de mathématiques, 1884. p. 189, 397; Mathesis, tome V. p. 58, 128; Grunert-Hoppe: Archiv, LX. Bd. p. 178).

Pascalova závitnice (limaçon de Pascal) jest, jak známo, úpatnice křivky kruhové z polu mimo ni daného. *Persutti* poznal, že křivka tato jest měřické místo vrcholu c v trojúhelníku abc, jehož půdice ab jest stálá a ve kterém $\sphericalangle cab = 2. \sphericalangle acb$. Strany trojúhelníka takového vyhovují rovnici $a^2 = bc + c^2$, která jest tedy bipolárnou rovnicí P. závitnice.

Pittareli podal specielní theorii této křivky, vyjádřiv souřadnice bodu jejího racionalnými funkcemi proměnného parametru λ:

$$x = \frac{a + b\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} \cdot (1 - \lambda^2), \quad y = \frac{a + b\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} \cdot 2\lambda;$$

mezi jinými dokázal tuto větu, již objevil *Faure*: Kružnice, která prochází stálým bodem o a kterou lze zříti v stálém úhlu z bodu o', obaluje P. závitnici, jejímiž ohnisky jsou body o, o' Zvláště vyšetřena jest křivka obalová přímek protínajících P. závitnici ve 4 bodech harmonických; křivka ona jest 6. stupně a 3. třídy. (Giornale di matematiche, 1883. p. 145, 169, 173.)

Druhy projektivnosti dvou rovinných neb prostorových soustav podrobně vyšetřil a systemisoval *Gino Loria* v Battagliniově Giornale di matematiche 1884, p. 1—16.

Projektivnost (homografie) dvou rovinných soustav jest — jak známo — taková jich sdruženost, při které každému bodu jedné roviny přísluší jediný bod v rovině druhé a naopak, rovněž každé přímce jedné roviny určitá přímka roviny druhé a naopak. Dle toho, jsou-li obě roviny různé neb sjednocené, rozeznáváme rovinné *soustavy soumístné* neb *nesoumístné*. V obou těchto případech nastati může buď *projektivnosť obyčejná* (corrispondenza proiettiva non degenere) aneb *projektivnosť zrůdná* (corr. proiettiva degenere). Při této vyskytuje se v jedné z rovin daných zvláštní bod *s* a ve druhé zvláštní přímka S′ tak, že každému bodu prvé roviny náleží určitý bod přímky S′, ale všem bodům druhé roviny přísluší v prvé týž bod *s*; se všemi přímkami prvé roviny sdružena jest přímka S′ a každé přímce druhé roviny náleží v prvé přímka svazku *s*. — Jsou-li obě rovinné soustavy soumístné, lze též přihlížeti k samodružným jich prvkům; v případě obecném vyskytují se 3 samodružné body a jimi určené 3 samodružné přímky, v případech zvláštních mohou se 2 neb 3 z těchto prvků sjednotiti. Obě soustavy mohou též míti samodružný svazek přímek a samodružnou řadu bodů; jsou pak v souvislosti *homologie*.

Dvě soustavy prostorové slovou projektivnými či homografickými, přísluší-li každému bodu jedné soustavy určitý bod druhé a naopak, každé rovině jedné určitá rovina druhé a naopak. *Zrůdné případy* mohou nastati dva. Při prvém existuje v jedné soustavě zvláštní bod *s* a ve druhé zvláštní rovina S′ tak, že každému bodu v první soustavě přísluší ve druhé určitý bod roviny S′, všem pak bodům soustavy druhé náleží jediný bod *s* soustavy prvé. Roviny soustavy druhé příslušné k rovinám prvé sjednocují se v rovinu S′, každé rovině druhé soustavy sdružena v prvé rovina obsahující bod *s*. Jiný druh degenerované homografie prostorové vyznačuje se zvláštní přímkou S v soustavě prvé a přímkou zvláštní S′ v soustavě druhé. Tu pak každému bodu prvé soustavy druží se určitý bod přímky S′, každému bodu druhé soustavy přísluší však kterýkoli bod přímky S. Každé rovině druhé soustavy náleží určitá rovina svazku S, kdežto rovině soustavy prvé příslušna jest kterákoli rovina svazku S′. — Pokládáme-li obě prostorové soustavy za soumístné, mají obecně 4 samodružné body a jimi určené 4 samodružné roviny, ze kterých samodružných prvků 2, 3 neb i 4 mohou se sjednocovati. V soustavách takových mohou se však vyskytnouti dvě mimoběžky, z nichž jedna jest osou samodružné řady bodů, druhé osou samodružného svazku rovin; tento druh projektivnosti nazývá *Battaglini* prospettiva di 1a specie, geometrové němečtí zovou jej *axiale Collineation.* V obou soustavách mohou též býti dvě mimoběžky, z nichž každá jest osou samodružné řady bodové i samodružného svazku rovin; případ tento slove prospettiva di 2a specie či *geschaarte Collineation.* Obě soustavy mohou posléze obsahovati bod, jímž procházející roviny jsou samodružné a rovinu, v níž obsažené body jsou samodružné; souvislosť obou soustav jest pak *homologie* (prospettiva di 3a specie, *centrische Collineation).*

Přihlížeje ke všem možným vztahům, případy involuční však zvláště nepočítaje, ustanovil *Loria* 13 druhů projektivnosti soustav rovinných a 34 druhů projektivnosti soustav prostorových.

Kvadratická transformace. V rovině dány jsou tři stálé přímky omezující $\triangle abc$; jelikož třemi tečnami a ohniskem jest křivka 2. stupně určena, lze k libovolnému bodu m přidružiti bod m' tak, aby oba tyto body byly ohnisky kuželosečky dotýkající se stran daného trojúhelníka. Bod m' snadno sestrojíme: spojíme-li totiž bod daný m s vrcholy a, b, c a ustanovíme-li vzhledem ku příčkám půlícím úhly trojúhelníka ku $\overline{am}$, $\overline{bm}$, $\overline{cm}$, přímky souměrné, mají tyto společný průsečík m'. Body takto involučně sdružené — *points arguésiens* dle *Neuberga* (Mathesis, tome I. p. 154) — jsou důležitými v nauce o trojúhelníku; tak jsou ku př. body takovými: střed kružnice opsané o trojúhelník a průsečík výšek jeho, těžiště trojúhelníka a bod Lemoineův oba body Brocardovy a j.

Sdruženosť bodů m, m' svrchu stanovená jest zvláštní kvadratická transformace, již vyšetřoval *Schoute* (Darboux, Bulletin des sciences math. 1882, p. 152). Je-li gem. místo bodu m přímka, tvoří příslušné body m' určitou kuželosečku, jak patrno z projektivnosti svazků zde se vyskytujících. Nalezá-li se bod m v některé straně trojúhelníka abc, leží sdružený s ním bod m' v protějším vrcholu tohoto trojúhelníka; proto všechny kuželosečky sdružené s přímkami roviny procházejí vrcholy a, b, c, které jsou tudíž základními body této transformace. Úběžné přímce roviny přísluší kružnice opsaná o trojúhelník základní.

Transformujeme-li tímto spůsobem libovolnou kuželosečku, obdržíme racionálnou křivku 4. stupně, která má body a, b, c dvojnásobnými. Analyticky lze transformaci tuto pomocí homogenních souřadnic bez obtíží vykonati; jsou-li totiž souřadnice bodu m vzhledem ku trojúhelníku základnímu x, y, z a bodu m' souřadnice x_1, y_1, z_1, jsou tyto v souvislosti

$$xx_1 = yy_1 = zz_1.$$

Je-li tedy rovnice kuželosečky dané

$$K \equiv a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1yz + 2b_2xz + 2b_3xy = 0,$$

jest rovnice křivky odvozené

$$K' \equiv \frac{a_1}{x_1^2} + \frac{a_2}{y_1^2} + \frac{a_3}{z_1^2} + \frac{2b_1}{y_1z_1} + \frac{2b_2}{x_1z_1} + \frac{2b_3}{x_1y_1} = 0.$$

Pomocí této transformace dokázal *Astor* některé vlastnosti křivek racionálných stupně 4.; na př: Šest tečen sestrojených k racionálné křivce 4. stupně v bodech dvojnásobných protíná strany trojúhelníka body dvojnásobnými určeného v šesti bodech určité kuželosečky.

Zvláštní případ této transformace jest inverse kruhová (transformace převratnými průvodiči); stranami základního trojúhelníka dlužno zvoliti úběžnou přímku v rovině a dvé přímek směřujících k úběžným bodům kruhovým.

(Nouvelles annales de mathématiques. 1884. p, 181.).

Plochy třetího stupně. Sborcená plocha 3. stupně, jejíž dvojnásobnou přímku zvolíme osou Z a dvě její prosté přímky osami X, Y má rovnici

$$(ax + by + c)\, xy + (gx^2 + hxy + fy^2)\, z = 0;$$

z rovnice té lze snadno poznati druh plochy. Je-li $gf < o$, jest to hyperboloid kubický jednoduchý; je-li $gf > o$ a zároveň $h^2 - 4gf > o$, obdržíme hyperboloid kubický dvojitý; při $h^2 - 4gf < o$ ellipsoid kubický a při $h^2 - 4gf = o$ paraboloid kubický. Užitím oné rovnice odvodil *Nicodemi* některé zajímavé věty o plochách sborcených 3. stupně.

Rovina jdoucí přímkou povrchovou takové plochy protíná ji v kuželosečce K, v níž lze stanoviti průměr sdružený s P. Geometrické místo těchto průměrů obsažených v rovinách svazku P jest jednodílný hyperboloid 2. stupně, mající s danou plochou společnou přímku P, dvojnásobnou přímku Z a určitou křivku prostorovou 3. stupně. Geometrické místo středů kuželoseček K obsažených v rovinách svazku P jest kuželosečka L; všechny takto vzniklé kuželosečky L vyplňují plochu 3. stupně podobnou dané. (Giornale di matematiche, 1883. p. 270.)

Casani vyšetřoval geom. místo polů přímky P vzhledem ke kuželosečkám K v rovinách svazku P, předpokládaje však obecnou plochu 3. stupně. Kuželosečky K stanoví v P kvadratickou involuci s dvěma samodružnými body a_1, a_2; jsou tedy ve svazku P dvě roviny obsahující kuželosečky, které se přímky P v bodech a_1, a_2 dotýkají. V témž svazku jest dále 5 rovin, v nichž obsažené kuželosečky K rozpadají se každá ve dvé přímek protínajících se v bodě b. Hledané geom. místo jest křivka prostorová 3. stupně, která se plochy v bodech a_1, a_2 dotýká a prochází též body b_1, b_2, b_3, b_4, b_5. (Giornale di matematiche, 1884. p. 59.)

(Napsal **Matyáš Lerch** v Praze.)

Pan *Gust. Ferd. Meyer* dochází ve své knize „*Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale*“ k následujícímu nesprávnému resultátu, jehož vývoj tu třeba naznačiti.

1. Je-li $\psi(x)$ celistvá funkce stupně n-tého, jejíž kořeny α_k jsou vesměs komplexní a jednoduché, a jeli $\varphi(x)$ cel. funkce stupně $\leqq n-2$, jest, jak známo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)dx}{\psi(x)} = \sum_k sgn\left(\frac{\alpha_k}{i}\right) . \frac{\varphi(\alpha_k)}{\psi'(\alpha_k)},$$

kde $sgn(\beta)$ značí $+1$ neb -1, jak je realná část veličiny β kladná či záporná.

2. Užije-li se tohoto výsledku v případě

$$\varphi = x^{m-1}, \ \psi = x^n - e^{\vartheta i}$$

obdrží se pro liché m, jestliže, jak autor mlčky předpokládá, $\vartheta \left\{ \begin{matrix} < 2\pi \\ > 0 \end{matrix} \right\}$; po krátké úvaze:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}dx}{x^n - e^{\vartheta i}} = \frac{4\pi i}{n} \frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i}}{1-e^{2\frac{m}{n}\pi i}}.$$

Z tohoto správného výsledku tvoří autor následující zřejmou paradoxní konklusi. Zvětší-li se ϑ o 2π, nemění se funkce pod znamením integračním, kdežto výraz v pravo se obecně mění, a tedy: „Ein bestimmtes Integral kann mithin je nach der Wahl darin befindlicher Parameter verschiedene Werthe selbst dann annehmen, wenn mit der Aenderung dieser Parameter eine Veränderung der Function unter dem Integralzeichen auch nicht verbunden ist."

Leč kdyby byl autor předpokládal

$$\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi, \quad \vartheta_0 \gtrless {}^{o}_{2\pi},$$

byl by obdržel následující výsledek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}dx}{x^n - e^{\vartheta i}} = \frac{4\pi i}{n} \cdot \frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta_0 i}}{1-e^{2\frac{m}{n}\pi i}},$$

kde $\vartheta_0 = 2\pi \, . \, Z\left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right)$ značí onu z veličin $\frac{\vartheta}{2\pi} \pm k$ (k celistvé), jejíž realná část je kladná a menší než 1. Poslední vzorec pak platí i pro komplexní ϑ, vyjímaje ryze pomyslná, pro něž integral je přetržitým, jakož i všecky hodnoty tvaru $\vartheta = \tau i \pm 2k\pi$.

V témž díle praví p. *Meyer* (pag. 154, pozn.) následovně:

Značíli $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$, řadu konečných veličin, tak aby pro velmi veliká n ustavičně nehledě na znamení

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

jest

$$\lim u_n = 0,$$

kde se lim. vztahuje k nekonečně rostoucímu n."

Že to mínění mylné, plyne odtud, že můžeme určiti nekonečnou řadu pravých zlomků kladných

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$$

které se blíží s pravé strany zlomku $\delta > 0$ libovolně danému. Stačí vzíti

$$u_n = \delta + \frac{1-\delta}{n},$$

aby podmínky byly splněny: Neboť patrně je tu $u_n > u_{n+1}$, tedy $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pro všecka n, a přec je $\lim\limits_{n=\infty} u_n = \delta > 0$.

Úlohy.

Řešení úlohy 1.

(Zaslal pan *Josef Sumr*, technik v Praze.)

Píšeme-li součet s_n ve tvaru

$$s_n = \frac{3^n}{2^{n-8}} - 2^8,$$

poznáváme na pohled, že má celistvou hodnotu při $n \leqq 8$; součet prvých 8mi členů jest pak

$$s_8 = 3^8 - 2^8 = 6305.$$

Chceme-li povahu řady dané seznati, ustanovme ze součtu daného $s_{n-1} = (3^{n-1} - 2^{n-1}) : 2^{n-9}$, a odtud

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 3^{n-1} : 2^{n-8}.$$

Jelikož jest potom $a_{n-1} = 3^{n-2} : 2^{n-9}$ a tudíž

$$a_n : a_{n-1} = \frac{3}{2},$$

jest tedy daná řada posloupností geometrickou.

Správné řešení zaslali pp.: *Ant. Vyskočil* ze VI. tř. real. a *Karel Novák* ze VII. tř. g. v Hradci Králové, *Ant. Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi, *Boh. Mašek* ze VII. tř. g. v Jindř. ul.