Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bohuslav Pavlík

O Heavisidově metodě řešení diferenciálních rovnic ve fysice

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 2, 72--114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121422

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1931

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

O Heavisidově metodě řešení diferenciálních rovnic ve fysice.

Referuje Dr. *Bohuslav Pavlík.*

(Došlo 15. září 1930.)

Toto pojednání ukazuje nejprve (I) na problémy, kde lze Heavisidový metody použíti a v další kapitole (II) se zabývá problémem sítě.

Potom (III, 3) zaveden pojem kmenové funkce $H(p)$ a objasněn význam operátovové rovnice (4).

V dalším oddíle (IV) provedeno řešení problému a sice jednak metodou rozvoje v řadu (5), jednak rozkladem v parciální zlomky (6). Na příkladu ukázáno, jak se řešení v praxi provádí (5b resp. 6a). V další kapitole je porovnán význam obou metod (5c resp. 6b).

V dalším oddíle (V) je uvedena tabulka některých omezených integrálů tvaru $\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$, jež se při počítání často vyskytují (8) a některé matematické věty (9—16). V dalším odstavci (17) provedeno zevšeobecnění řešení pro libovolné napětí.

V oddíle (VI) řešeny některé příklady.

Úvod.

1. V teoretické fysice (v mechanice, termice, elektřině a pod.) naskýtá se často problém řešiti soustavu lineárních diferenciálních rovnic s pravou stranou. V takovém případě dostaneme obecný integrál jako součet obecného integrálu systému bez pravé strany a partikulárního integrálu rovnic s pravou stranou.

Jde-li o vyšetřování děje již stacionárního (t. j. po dosti dlouhé době od okamžiku, kdy začaly působiti vnější síly), zbude jako řešení pouze integrál partikulární; jen při vyšetřování dějů nabíhacích (t. j. těsně po začátku působení vnějších sil) uplatňuje se v obecném integrálu našeho systému rovnic také obecný integrál rovnic bez pravé strany.

Postupujeme-li při řešení obvyklými obraty, setkáváme se při stanovení integračních konstant z počátečních podmínek s obtížemi. Dlužno si uvědomiti, že hlavně v elektrotechnice bývají počáteční podmínky definovány u velké většiny problémů stejně: v některém místě systému vodičů je vloženo napětí, které se rovná nule až do jistého okamžiku (od tohoto okamžiku čítáme čas). Od tohoto okamžiku počínajíc je vložené napětí různé od nuly a je jakousi (známou) funkcí času. Snaha tudíž směřuje ke zjednodušení řešení diferenciálních rovnic s těmito počátečními podmínkami. Uvedeného cíle umožňuje nám dosáhnouti Heavisidova metoda řešení diferenciálních rovnic, kterou lze nazvati symbolickou. Ona podává poměrně snadno řešení zmíněného druhu problémů již se zřetelem k uvedeným počátečním podmínkám. Je patrno, že hlavní význam má pro elektrotechniku; ale i jinde se této metody hojně používá.

S počátku se šířilo používání této metody jen zvolna; příčinou asi bylo, že spisy Heavisidovy nebyly příliš jasné a rovněž asi, že Heaviside podal své poučky většinou bez důkazu. V přítomné době však existuje velmi obšírná literatura o této metodě a jejím používání.*)

Pro stále rostoucí význam a šířící se používání Heavisidovy metody pokládám za potřebné podati v tomto článku český přehled o obratech Heavisidovy metody a objasniti na několika typických příkladech, jak se jí v praxi používá. Jako pomůcek jsem použil hlavně citované literatury.

Při povrchním pohledu na článek bude se zdáti, že odvozovací cesty této metody jsou příliš umělé a že je potřebí k ovládnutí jich hlubší matematické erudice; tato zdánlivá obtíž je však mnohokráte vyvážena jednoduchostí, se kterou při řešení postupujeme.

II. Odvození základní rovnice problému.

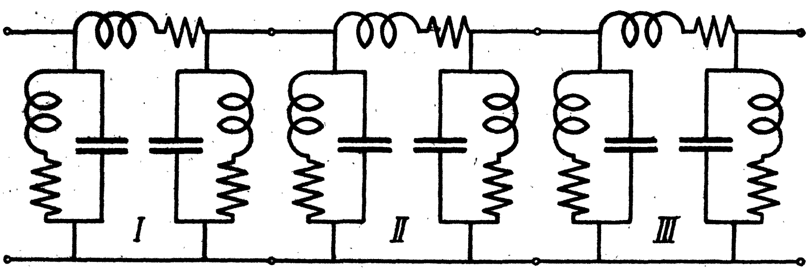
2. Spojme jakkoli libovolný konečný počet ohmických odporů, samoindukcí a kapacit — zkrátka odporů v širším slova smyslu. Několik takových skupin spojme jakkoli mezi sebou. Agregát, který takto obdržíme, nazýváme elektrickou sítí (viz na př. obr. 1). Jednotlivé skupiny slují její členy (v obr. 1 jsou to I, II, III). Přirozeně není nutné, aby v každém členu byly zastoupeny všechny odpory v širším slova smyslu, ani aby všechny členy byly uniformní. Je-li počet členů konečný, má síť konečný počet stupňů volnosti a úloha je popsána konečným počtem simultánních diferenciálních rovnic (na př. problém řešený systémem rovnic (8)). Je-li počet členů nekonečně malých nekonečně velký, řeší problém jediná parciální diferenciální rovnice.

V technické praxi pravíme, že síť je v rovnováze, jestliže jsou všechny její náboje a proudy identicky rovny

*) Na př. Carson: Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung (překlad z angličtiny od Ollendorfa a Pohlhausena); Breisig: Theoretische Telegraphie; van der Pol: Philosophical Magazine VII, 1153, 1929 a VII, 8, 861, 1929 atd. Další literatura citována v knize Carsonově.

nule. Předpokládejme, že vložíme v čase $t = 0$ do některého členu sítě v rovnováze jednotkové napětí — na př. do prvního členu. Proud, který vznikne v n-tém členu sítě, označme $A_{n1}(t)$ (t je čas čítaný od zařazení napětí); budeme jej nazývati **relativní vodivost** (Übergangsleitwert) n-tého členu vzhledem k prvému; tuto relativní vodivost lze také definovati jako poměr proudu v n-tém členu k napětí, které bylo v čase $t = 0$ vloženo do členu — v našem případě — prvého.

Ježto předpokládáme, že v síti není jiných zdrojů, dá se dokázati, že $A_{kl}(t) = A_{lk}(t)$, t. j. hodnota relativní vodivosti se nezmění, vyměníme-li mezi sebou místa, kde vkládáme napětí a kde



Obr. 1.

měříme intensitu. Ježto vkládáme napětí vždy jen do jednoho a téhož členu sítě, je zbytečné psáti indexy; budeme tudíž v dalším psáti prostě $A(t)$, indexy si pouze pomýšlejíce.

Ježto rovnice, vyjadřující vlastnosti sítě, jsou lineární, plyne, že, vložíme-li do některého členu sítě, jež byla v rovnováze, v čase $t = \tau$ stejnosměrné napětí $E = E_\tau$, vznikne proud $E_\tau A(t - \tau)$ (čas, který uplynul od zařazení napětí, je totiž $t - \tau$). Vložíme-li do téhož členu v časech $0, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ stejnosměrná napětí $E_0, E_1, E_2, \ldots E_n$, superponují se jednotlivé vlivy a výsledný proud je

$$I(t) = E_0 A(t) + E_1 A(t - \tau_1) + E_2 A(t - \tau_2) + \ldots + E_n A(t - \tau_n)$$

$$I(t) = \sum_{k=0}^{n} E_k A(t - \tau_k).$$

Napětí $E_0, E_1, E_2, \ldots E_n$ specifikujme takto:

Na určitý člen sítě, jež byla v rovnováze, vložíme napětí $E(t)$, jež vyhovuje těmto podmínkám:

a) pro $t < 0$ $\quad E \equiv 0$,

b) pro $0 < t < \Delta t$ $\quad E(t) = E(0)$,

c) pro $\Delta t < t < 2\Delta t$ $\quad E(t) = E(0) + \Delta_1 E$,

d) pro $2\Delta t < t < 3\Delta t$ $\quad E(t) = E(0) + \Delta_1 E + \Delta_2 E$,

. . . .

Přiroste tudíž napětí v časovém intervalu $(k-1)\,\Delta t < t < k\Delta t$ o $\Delta_k E$. Podle poslední rovnice je tedy výsledný proud:

$$I(t) = E(0)\,A(t) + \Delta_1 E\,.\,A(t-\Delta t) + \Delta_2 E\,.\,A(t-2\,\Delta t) + \ldots$$
$$\ldots + \Delta_n E\,.\,A(t-n\Delta t). \qquad (1)$$

Přejděme k limitě $\lim \Delta t = dt$ a $k\Delta t = \tau$. Napětí, které vkládáme do příslušného členu sítě, jeví se jako funkce času, čítaného od okamžiku, kdy bylo vloženo prvé napětí, t. j. jeví se jako funkce $k\Delta t$ čili τ. Pak podle známých obratů:

$$\Delta_k E = \frac{dE(\tau)}{d\tau}\,d\tau.$$

Rovnice (1) přejde v rovnici (2)

$$I(t) = E(0)\,A(t) + \int^{t} A(t-\tau)\,\frac{dE(\tau)}{d\tau}\,d\tau. \qquad (2)$$

Integrací „per partes" plyne:

$$I(t) = E(t)\,A(0) + \int_0^t A'(\tau)\,E(t-\tau)\,d\tau. \qquad (3)$$

Substitucí $t - \tau = t'$ plyne, píšeme-li ještě τ místo t', z rovnice (2)

$$I(t) = E(0)\,A(t) + \int_0^t A(\tau)\,\frac{dE(t-\tau)}{d\tau}\,d\tau. \qquad (4)$$

Stejnou substitucí v (3) plyne

$$I(t) = E(t)\,A(0) + \int_0^t A'(t-\tau)\,E(\tau)\,d\tau. \qquad (5)$$

Místo rovnice (5) lze psáti

$$I(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t A(t-\tau)\,E(\tau)\,d\tau, \qquad (6)$$

jak se snadno přesvědčíme:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t A(t-\tau)\,E(\tau)\,d\tau = \lim_{\Delta t=0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int_0^{t+\Delta t} A(t+\Delta t-\tau)\,E(\tau)\,d\tau - \right.$$
$$\left. - \int_0^t A(t-\tau)\,E(\tau)\,d\tau\right\} = \lim_{\Delta t=0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int_0^{t+\Delta t} A(t+\Delta t-\tau)\,E(\tau)\,d\tau - \right.$$

$$-\int_0^{t+\Delta t} A(t-\tau)\,E(\tau)\,d\tau + \int_0^{t+\Delta t} A(t-\tau)\,E(\tau)\,d\tau - \int_0^{} A(t-\tau)\,E(\tau)\,d\tau \Bigg| =$$

$$= \int_0^t \frac{d}{dt} A(t-\tau)\,E(\tau)\,d\tau + A(0)\,E(t) \quad \text{q. e. d.}$$

Provedeme-li v. rovnici (6) substituci $t - \tau = t'$ a pak opět píšeme τ místo t', obdržíme:

$$I(t) = \frac{d}{dt}\int^t A(\tau)\,E(t-\tau)\,d\tau. \qquad (7)$$

Nechť jde o to stanoviti relativní vodivost. Představme si, že v čase $t = 0$ vložíme do určitého členu sítě napětí e^{pt}, kdež $p > 0$ (reálné) nebo je komplexní s positivní reálnou částí. Pak proud se skládá ze dvou částí: z vynuceného proudu, který jeví stejnou časovou závislost jako e^{pt}, a z vlastních kmitů, jež označíme $y(t)$. Vynucený proud má tvar $\frac{e^{pt}}{Z(p)}$; to pochopíme na základě této úvahy:

Uvažujeme-li síť o n členech, platí tento systém n diferenciálních rovnic:

$$\sum_{l=1}^{n}\left(L_{kl}\frac{d}{dt} + R_{kl} + \frac{1}{C_{kl}}\int dt\right) I_l = E_k \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots n, \qquad (8)$$

kde dvojitý index u odporů znamená, že jsou společné současně i členu k-tému i l-tému; E_k je vtištěná elektromotorická síla k-tého členu.

K našemu účelu stačí předpokládati, že pouze $E_1 \neq 0$, kdežto $E_k = 0$ pro $k = 2, 3, \ldots n$. Nechť $E_1 = F_1 e^{pt}$; lze předpokládati, že I_l bude míti po uplynutí dosti dlouhé doby tvar

$$I_l = J_l \,.\, e^{pt},$$

takže

$$\frac{d}{dt} I_l = pJ_l e^{pt} = pI_l$$

a pro $p > 0$ resp. s kladnou reálnou částí

$$\int_{-\infty}^{t} I_l\,dt = \frac{1}{p} J_l e^{pt} = \frac{1}{p} I_l.$$

To dosazeno do rovnic (8) dává (po krácení e^{pt})

$$\sum_{l=1}^{n}\left(pL_{kl}+R_{kl}+\frac{1}{C_{kl}}:\frac{1}{p}\right)J_l=F_k,$$

kde $F_k=0$ pro $k=2,3,\ldots n$. To je pro příslušná J_l soustava rovnic algebraických.

Klaďme:

$$pL_{kl}+R_{kl}+\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{C_{kl}}=z_{kl}(p)=z_{kl}.$$

Tím se uvede náš systém rovnic na tvar

$\sum_{l=1}^{n} z_{kl}J_l=F_k$, pro $k=1,2,\ldots n$ a kde $F_k=0$ pro $k=2,3,\ldots n$.

Řešení našeho systému n lineárních algebraických rovnic o n neznámých za předpokladu, že determinant soustavy $D\neq 0$, zní

$$J_l=\frac{M_{1l}(p)}{D(p)}\cdot F_1=\frac{M_{1l}}{D}\cdot F_1,$$

kdež M_{1l} značí doplněk prvku (subdeterminant s příslušným znamením) ležícího v prvém řádku a l-tém sloupci v determinantu D, čili

$$I_l=\frac{M_{1l}}{D}\cdot F_1e^{pt}=\frac{F_1}{Z_{l1}}e^{pt}.$$

V případě, o který nám šlo, bylo $F=1$.

Jak patrno, dostaneme $Z(p)$ (index si pomyšlíme), které přichází ve jmenovateli výrazu pro vynucené kmity, naznačeným způsobem, když v příslušné diferenciální rovnici (resp. systému rovnic) nahradíme výraz d/dt výrazem p a $\int dt$ výrazem $1/p$.

Celkový výsledný proud můžeme tedy psáti takto:

$$I(t)=\frac{e^{pt}}{Z(p)}+y(t). \tag{9}$$

Klaďme v rovnici (7) $E(t)=e^{pt}$; obdržíme:

$$I(t)=\frac{d}{dt}e^{pt}\int_0^t A(\tau)e^{-p\tau}d\tau=$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{e^{pt}\int_0^\infty A(\tau)e^{-p\tau}d\tau-e^{pt}\int_t^\infty A(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right\}.$$

Provedeme-li derivování, obdržíme:

$$I(t)=pe^{pt}\int_0^\infty A(\tau)e^{-p\tau}d\tau-pe^{pt}\int_t^\infty A(\tau)e^{-p\tau}d\tau+A(t). \tag{10}$$

Položíme-li (9) = (10) a dělíme-li e^{pt}, dostaneme:

$$\frac{1}{Z(p)} + y(t)\, e^{-pt} = p \int_0^\infty A(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau - p \int_t^\infty A(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau + A(t)\, e^{-pt}. \tag{11}$$

Rovnice (11) platí pro všechny hodnoty t, tedy také pro $t = \infty$; pak plyne z rovnice (11) — za předpokladu, že p má reálnou část positivní —

$$\frac{1}{pZ(p)} = \int_0^\infty A(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{12}$$

Tato integrální rovnice (12) určuje relativní vodivost $A(t)$ pro všechna p positivní nebo s positivní reálnou částí. Metoda odvozena pro speciální případ, ale platí zcela obecně.

III. Heavisidova úloha.

3. Pojem kmenové funkce.

Shledali jsme, že, vložíme-li do některého členu sítě, jež byla až do okamžiku $t = 0$ v rovnováze, v čase $t = 0$ napětí $E(t)$, děj je popsán dvěma rovnicemi: relativní vodivost je určena integrální rovnicí (12)

$$\frac{1}{pZ(p)} = \int_0^\infty A(t)\, e^{-pt}\, dt; \tag{12}$$

intensita proudu se pak určí vypočtením integrálu:

$$I(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t A(t - \tau)\, E(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

$Z(p)$ budeme nazývati kmenovou funkcí příslušnou k funkci $A(t)$. Nahradíme-li p výrazem $j\omega$, kde ω je známá kruhová frekvence, pak $Z(j\omega)$ je komplexní odpor, známý z teorie střídavých proudů.

Rovnice (12) a (6) řeší úplně náš problém; při tom jsou již splněny počáteční podmínky, definované na začátku odstavce.

Ve svém odvozování jsme předpokládali, že rovnice sítě jsou lineární a že existuje partikulární řešení tvaru $e^{pt}/Z(p)$ pro hodnoty p s positivní reálnou částí. Neznámá v rovnicích tvaru (12) a (6) nemusí býti proud; neznámými mohou býti i jiné fysikální veličiny, jako náboj, napětí a pod. Zavedeme tedy v rovnicích (12) a (6) obecnější označení (t. j. zavedeme formální zevšeobecnění):

$$\frac{1}{pH(p)} = \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{13}$$

$$x(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t h(t-\tau)\, E(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Při tom odpovídá $E(t)$ napětí z předchozích úvah, $x(t)$ je neznámá, kterou máme stanoviti — na př. v předchozích úvahách intensita. Symbolickou rovnici

$$x = \frac{E}{H(p)} \tag{15}$$

nazýváme operátorovou rovnicí. $H(p)$ odpovídá odporu $Z(p)$ a určí se popsaným způsobem. Analogicky funkce $h(t)$ odpovídá vodivosti. Říkáme jí stručně Heavisidova funkce; $H(p)$ sluje zevšeobecněná funkce kmenová.

4. Operátorová rovnice.

Na síť, jež byla až do okamžiku $t = 0$ v rovnováze, bylo vloženo v čase $t = 0$ jednotkové napětí. Tážeme se po chování sítě. Jde tedy především o stanovení relativní vodivosti.

Heaviside vychází z diferenciální rovnice; nahrazuje v ní symbol d/dt symbolem p a symbol $\int dt$ symbolem $1/p$. Tím přejde rovnice diferenciální v rovnici algebraickou. Heaviside specialisuje vložené napětí tak, že předpokládá, že v čase $t = 0$ bylo vloženo napětí jednotkové; jeho výpočty se vztahují pouze na $t > 0$. Formální řešení problému lze tedy psáti ve tvaru:

$$h = \frac{1}{H(p)}, \tag{16}$$

kde podle předchozího je h funkce Heavisidova, t. j. zevšeobecněná relativní vodivost; je dobře si ihned uvědomiti, že v tomto speciálním případě h značí současně proud tekoucí příslušným členem.

Rovnice (16) je pouze symbolická; úkolem naším je dáti jí fysikální význam — speciálně vyšetřiti význam operátoru p. Ten je patrný, uvědomíme-li si, že symbolická rovnice (16), určující proud h v tomto speciálním případě, je rovnocenná s integrální rovnicí určující proud

$$\frac{1}{pH(p)} = \int^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{17}$$

Symbolickou operátorovou rovnici musíme správně interpretovati. Heaviside dostal příslušná pravidla početní tak, že srovnával operátorovou rovnici se známým řešením určitých úloh a konal pak soudy „per analogiam". Tak získal obecná pravidla pro přeměnu operátorové rovnice v explicitní řešení.

IV. Řešení problému. Dvě základní metody.

5. Metoda řešení rozvojem v řadu.

Pro řešení problému, t. j. stanovení proudu, který se za zmíněných zjednodušujících předpokladů rovná relativní vodivosti, Heaviside podává tento návod: Rozvineme pravou stranu operátorové rovnice

$$h = \frac{1}{H(p)} \tag{16}$$

podle rostoucích mocností $1/p$

$$h = a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \ldots + \frac{a_n}{p^n} + \ldots \tag{18}$$

Abychom dostali explicitní řešení ve formě potenční řady, nahradíme $1/p^n$ výrazem $t^n/n!$; explicitní řešení problému tudíž je:

$$h = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + a_2 \frac{t^2}{2!} + a_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots + a_n \frac{t^n}{n!} + \ldots \tag{19}$$

Předpokládejme, že v rovnici

$$\frac{1}{pH(p)} = \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt \tag{17}$$

lze funkci $h(t)$ rozvinouti v potenční řadu:

$$h(t) = h_0 + \frac{h_1 t}{1!} + \frac{h_2 t}{2!} + \ldots \tag{20}$$

Uvážíme-li, že

$$\int_0^\infty \frac{t^n}{n!} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p^{n+1}} \quad \text{pro } p > 0,$$

dostaneme na pravé straně, dosadíme-li (20) do (17) a integrujeme-li člen za členem,

$$\frac{h_0}{p} + \frac{h_1}{p^2} + \frac{h_2}{p^3} + \ldots \tag{21}$$

Nyní rozvineme levou stranu integrální rovnice podle negativních mocností p

$$\frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p^3} + \ldots, \tag{22}$$

při čemž

$$a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \ldots$$

je asymptotický rozvoj pro funkci $1/H(p)$.

Srovnáme-li nyní oba rozvoje, je patrno, že

$$h_n = a_n$$

a že tedy v souhlase s Heavisidem

$$h(t) = a_0 + \frac{a_1 t}{1!} + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \ldots \tag{19}$$

Toto odvození není se stanoviska matematického úplně přesné; má-li na př. $1/H(p)$ jen určitý obor konvergence, pak je možno jen v tomto oboru provésti integraci člen za členem. Dále jsme předpokládali, že $h(t)$ lze rozvinouti v potenční řadu, což nejsme vždy oprávněni předpokládati.

Proto podám odvození ještě jedno, přesnější. Nechť funkce $1/H(p)$ má formální asymptotický rozvoj

$$\sum_0^\infty \frac{a_n}{p^n}$$

a nechť nemá tato funkce žádnou součást, jež vymizí rychleji než sebe vyšší potence $1/p$; takovou funkcí, kterou vylučujeme, je na př. e^{-p}. Za těchto omezujících předpokladů uvažujme integrální rovnici a integrujme parcielně, dělíce $1/p$:

$$\frac{1}{H(p)} = h(0) + \int_0^\infty e^{-pt}\, h'(t)\, dt. \tag{23}$$

Vzrůstá-li v rovnici (23) p nade všecky meze, vymizí integrál na pravé straně a z asymptotického rozvoje

$$\frac{1}{H(p)} \sim \sum_0^\infty \frac{a_n}{p^n}$$

plyne v mezném případě námi uvažovaném, že $1/H(p)$ nabývá hodnoty a_0 a že tedy

$$h(0) = a_0.$$

Integrujeme-li ještě jednou parcielně, dostaneme

$$\frac{1}{H(p)} = h(0) + \left[-\frac{1}{p}\, e^{-pt}\, h'(t)\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}\, h''(t)\, dt,$$

t. j.

$$p\left(\frac{1}{H(p)} - a_0\right) = h'(0) + \int_0^\infty e^{-pt} h''(t)\, dt;$$

limitujeme-li opět pro lim $p = \infty$, dostaneme na levé straně rovnice a_1, na pravé $h'(0)$; tudíž

$$h'(0) = a_1.$$

Kdybychom takto postupovali dále, dostali bychom, že

$$h^{(n)}(0) = a_n.$$

Taylorův rozvoj funkce $h(t)$ zní:

$$h(t) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!} t + \frac{h''(0)}{2!} t^2 + \frac{h'''(0)}{3!} t^3 + \dots$$

Dostaneme tudíž, předpokládáme-li, že tento rozvoj konverguje,

$$h(t) = a_0 + \frac{a_1}{1!} t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \frac{a_3}{3!} t^3 + \dots = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} t^n. \tag{19}$$

Tak jsme odvodili rozvoj funkce $h(t)$ v potenční řadu; uvažme, že jsme ale naprosto nedokázali konvergenci tohoto rozvoje!

5a. Kterak se prakticky provádí řešení metodou rozvoje v řadu.

Heaviside nazývá přeměnu operátorové rovnice v explicitní řešení algebraisováním této rovnice. Při metodě řešení rozvojem v řadu spočívá algebraisování v tom, že rozvineme $1/H(p)$ v potenční řadu podle stoupajících mocností $1/p$:

$$\frac{1}{H(p)} = a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \dots$$

Tuto řadu můžeme pokládati za rozvoj podle skutečné proměnné p a nikoli za rozvoj pouze symbolický. Vlastní řešení pak dostaneme, když $1/p^n$ nahradíme $t^n/n!$, takže řešení zní:

$$h(t) = a_0 + \frac{a_1}{1!} t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \frac{a_3}{3!} t^3 + \dots$$

Borel nazývá tuto řadu asociovanou funkcí; ta je důležitá při jeho vyšetřováních o existenci součtu divergentních řad.

Algebraisování lze často provésti za použití pouhého binomického rozvoje. Existuje-li skutečně potenční řada, dojdeme k cíli tímto obratem; pišme

$$\frac{1}{H(p)} = \frac{1}{H(1/x)} = G(x)$$

a rozviňme $G(x)$ podle Taylorovy věty:

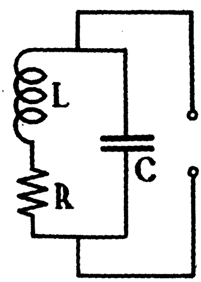
$$G(x) = G(0) + G'(0)\frac{x}{1!} + G''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots$$

Nahradíme-li opět x^n výrazem $\frac{1}{p^n}$ a klademe-li $\frac{G^{(n)}(0)}{n!} = a_n$, obdržíme:

$$G(x) = \frac{1}{H(p)} = a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \dots$$

5b. Příklad řešení rozvojem v řadu.

Na oscilační kruh (obr. 2) bylo vloženo v čase $t = 0$ jednotkové napětí; tážeme se po náboji kondensátoru.



Obr. 2.

Označíme-li odpor oscilačního kruhu R, samoindukci L a kapacitu C, platí tato diferenciální rovnice:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 1. \tag{24}$$

Z toho plyne popsaným obratem operátorová rovnice:

$$Q = \frac{1}{Lp^2 + Rp + 1/C} = \frac{1}{Lp^2(1 + 1/pT + \omega^2/p^2)}, \tag{25}$$

při čemž jsme zavedli zkratky:

$$T = \frac{L}{R}, \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Rozvineme-li podle binomické poučky, dostaneme

$$Q = \frac{1}{Lp^2}\left\{1 - \left(\frac{1}{pT} + \frac{\omega^2}{p^2}\right) + \left(\frac{1}{pT} + \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{pT} + \frac{\omega^2}{p^2}\right)^3 + \ldots\right\}$$

$$Q = \frac{1}{Lp^2}\left\{1 - \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{p} - \left(\omega^2 - \frac{1}{T^2}\right)\frac{1}{p^2} + \left(2\frac{\omega^2}{T} - \frac{1}{T^3}\right)\frac{1}{p^3} + \ldots\right\} \tag{26}$$

Nyní nahradíme v tomto výraze $1/p^n$ výrazem $t^n/n!$, takže řešení explicite zní:

$$Q = \frac{1}{L}\left\{\frac{t^2}{2!} - \frac{1}{T}\cdot\frac{t^3}{3!} - \left(\omega^2 - \frac{1}{T^2}\right)\frac{t^4}{4!} + \left(2\frac{\omega^2}{T} - \frac{1}{T^3}\right)\frac{t^5}{5!} + \ldots\right\}. \tag{27}$$

Abychom mohli výsledek srovnati s poznatky nám známými, klaďme $R = 0$ (oscilační kruh nemá odporu). Tu — jak známo — máme dostati netlumené oscilace. Z rovnice (27) plyne v tomto případě ($T = \infty$):

$$Q = \frac{1}{L}\left\{\frac{t^2}{2!} - \frac{1}{LC}\frac{t^4}{4!} + \frac{1}{L^2C^2}\frac{t^6}{6!} - \ldots\right\} =$$

$$= C\left\{\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)^2 - \frac{1}{4!}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)^4 + \ldots\right\}$$

$$Q = C\left(1 - \cos\frac{t}{\sqrt{LC}}\right),$$

což souhlasí se známými našimi poznatky.

5c. Kritika řešení pomocí potenční řady.

U některých úloh, které se zabývají volnými vedeními nebo kabelem, neexistuje potenční řada, ač lze udati řady, jež postupují podle lomených mocností t. Avšak ve všech případech, kdy existuje potenční řada, je řešení touto metodou daleko jednodušší než ostatními. Nesnáz nastává při numerickém vyčíslení, neboť součet takové řady lze udati přímo jen ve vzácných případech.

Heaviside přeceňuje tuto metodu; praví, že řešení úlohy může býti podáno ve dvojím tvaru: buď jako nekonečná řada nebo omezený integrál. Podle Heavisida nemá ale tento integrál ceny, není-li vyčíslen. Proto je prý nutno podati řešení ve formě řady. Proti tomu je ale nutno uvésti, že také řešení ve formě omezeného integrálu je cenné. Často řada vlastností funkce důležitých pro fysiku není patrna z jejího rozvoje, nýbrž pozná se jiným způsobem.

6. Metoda řešení rozkladem v parciální zlomky.

Heaviside podává tuto metodu bez veškerého důkazu. My vyjdeme z operátorové rovnice:

$$h = \frac{1}{H(p)}. \tag{16}$$

Metoda tato spočívá v tom, že explicitní řešení lze psáti ve tvaru

$$h = \frac{1}{H(0)} + \sum_1^n \frac{e^{p_k t}}{p_k H'(p_k)}, \tag{28}$$

kdež $p_1, p_2, \ldots p_n$ značí n kořenů rovnice $H(p) = 0$ a $H'(p_k) = \left[\frac{d}{dp} H(p)\right]_{p=p_k}$.

Abychom učinili tuto metodu plausibilní, napišme známý nám integrál, od něhož stále vycházíme a jenž je ekvivalentní s operátorovou rovnicí (16)

$$\frac{1}{pH(p)} = \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{17}$$

Lze psáti, jak známo z algebry:

$$\frac{1}{pH(p)} = \frac{1}{pH(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(p - p_k)\, p_k H'(p_k)}, \tag{29}$$

kdež $p_1, p_2, \ldots p_n$ je n kořenů rovnice $H(p) = 0$ (o nichž mlčky předpokládáme, že jsou vesměs různé a odlišné od nuly). Tento rozklad dosazen do integrální rovnice dává:

$$\frac{1}{pH(0)} + \sum_1^n \frac{1}{(p - p_k)\, p_k H'(p_k)} = \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{30}$$

Rozklad levé strany dává tušiti, že také na pravé straně existuje podobný rozvoj; klademe tedy:

$$h(t) = h_0(t) + h_1(t) + \ldots + h_n(t) \tag{31}$$

předpokládajíce, že

$$\frac{1}{pH(0)} = \int_0^\infty h_0(t)\, e^{-pt}\, dt \quad \text{a} \tag{32}$$

$$\frac{1}{(p - p_k)\, p_k H'(p_k)} = \int_0^\infty h_k(t)\, e^{-pt}\, dt \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots n. \tag{33}$$

Sečteme-li (32) a (33), pak plyne spolu s rovnicí (31), že rovnice (30) je splněna. Řešení (29) dostaneme, když spočteme $h_0, h_1, \ldots h_n$ z rovnic (32) a (33).

Víme, že

$$\int_0^\infty e^{\lambda t} \cdot e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p-\lambda},$$

kdež reálná část λ nesmí býti positivní; pak rovnicím (32) a (33) vyhovíme, klademe-li

$$\left.\begin{aligned} h_0(t) &= h_0 = \frac{1}{H(0)} \\ h_k(t) &= \frac{e^{p_k t}}{p_k H'(p_k)} \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Sečtením jednotlivých částečných řešení plyne

$$h(t) = \frac{1}{H(0)} + \sum_k \frac{e^{p_k t}}{p_k H'(p_k)}.$$

Zopakujme podmínky, za nichž platí naše odvození! Žádný z kořenů rovnice $H(p) = 0$ nesmí býti nulový, všechny musí býti vesměs různé a funkce $1/H(p)$ nesmí býti na žádném místě neurčitou. Tyto podmínky bývají u konečných sítí splněny nebo lze vhodnými transformacemi v operátorové rovnici toho dosáhnouti. Existují-li vícenásobné kořeny, předpokládáme nejprve, že jsou různé a pak provedeme limitní přechod pro mizející rozdíl kořenů*).

Tato metoda vede vždy k cíli, existuje-li řešení pomocí vlastních kmitů. Obecně řešení systému lineárních diferenciálních rovnic, který sloužil za východisko pro operátorovou rovnici $h = 1/H(p)$, zní

$$h(t) = C_0 + \sum_1^n C_k e^{p_k t}, \tag{35}$$

kde p_k je k-tý kořen rovnice $H(p) = 0$ a $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ jsou integrační konstanty, jež se určí z počátečních podmínek. Součet se vztahuje na všechny kořeny rovnice $H(p) = 0$; o nich předpokládáme, že jsou vesměs od sebe a od nuly různé. Dosadíme-li toto řešení do naší integrální rovnice a provedeme-li integraci člen za členem, obdržíme:

$$\frac{1}{pH(p)} = \int_0^\infty \left(C_0 + \sum_k C_k e^{p_k t}\right) e^{-pt}\, dt$$

$$\frac{1}{H(p)} = C_0 + p \sum_k \frac{C_k}{p - p_k};$$

*) Důkaz provedený v principu popsaným způsobem, ale opírající se o jiný základ, proveden v knize: F. Breisig: Theoretische Telegraphie, 1924, na str. 208.

klademe-li $p = 0$, obdržíme

$$C_0 = \frac{1}{H(0)}.$$

Abychom určili C_k, klademe $p = p_k + q$, při čemž předpokládáme, že q je malé; současně násobme výrazem $H(p_k + q)$:

$$C_0 H(p_k + q) + (p_k + q)\, H(p_k + q) \sum_l \frac{C_l}{p_k - p_l + q} = 1.$$

Použijeme-li Taylorova rozvoje, obdržíme:

$$C_0 H(p_k) + C_0 q H'(p_k) + \ldots + [p_k H(p_k) + q H(p_k) + p_k q\, H'(p_k) +$$
$$+ q^2 H'(p_k) + \ldots] \sum_l \frac{C_l}{p_k - p_l + q} = 1.$$

Uvažme, že p_k je kořenem rovnice $H(p) = 0$, tedy $H(p_k) = 0$; limitujeme-li pro $\lim q = 0$, pak všude u zbývajících členů zbude q jako faktor, jen v součtu Σ u sčítance, pro nějž $l = k$, zbude q také ve jmenovateli, takže plyne

$$p_k H'(p_k) C_k = 1$$

čili

$$C_k = \frac{1}{p_k H'(p_k)}.$$

Plyne tedy dosazením do rovnice (35)

$$h(t) = \frac{1}{H(0)} + \sum_k \frac{e^{p_k t}}{p_k H'(p_k)}.$$

Tím je naše tvrzení dokázáno.

6a. Příklad použití metody rozkladu ve zlomky.

Uvažujme opět oscilační kruh (obr. 2), na nějž bylo vloženo jednotkové napětí. Ptejme se opět po náboji kondensátoru! Operátorová rovnice zní v tomto případě:

$$Q = \frac{1}{Lp^2 + Rp + 1/C} \tag{25}$$

$$Q = \frac{1}{L(p^2 + p/T + \omega^2)}.$$

Nejprve stanovíme kořeny rovnice $H(p) = 0$:

$$H(p) \equiv L\left(p^2 + \frac{p}{T} + \omega^2\right) = 0$$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2T}\right)^2 - \omega^2} = -\frac{1}{2T} \pm \beta.$$

Dále nalezneme:

$$H'(p) \equiv 2L\left(p+\frac{1}{2T}\right)$$
$$H'(p_1) = 2\beta L$$
$$H'(p_2) = -2\beta L$$

a

$$\frac{1}{H(0)} = \frac{1}{L\omega^2} = C.$$

Výsledky dosadíme do rovnice (28); obdržíme

$$Q = C - \frac{e^{-t/2T}}{2\beta L}\left(\frac{e^{\beta t}}{1/2T-\beta} - \frac{e^{-\beta t}}{1/2T+\beta}\right).$$

Je-li $\omega^2 > (1/2T)^2$, je β ryze imaginární

$$\beta = j\sqrt{\omega^2-\left(\frac{1}{2T}\right)^2} = j\omega\sqrt{1-\left(\frac{1}{2T\omega}\right)^2} = j\omega'$$

a

$$Q = C - \frac{e^{-t/2T}(\omega'\cos\omega' t + 1/2T\sin\omega' t)}{\omega' L\,[(1/2T)^2+\omega'^2]}.$$

Srovnáme opět výsledek s výsledkem známým odjinud; nechť oscilační kruh nemá odporu ($R = 0$; $T = \infty$); pak $\omega' = \omega = 1/\sqrt{LC}$ a z posledního vzorce plyne shodně s tím, co jsme již jednou obdrželi a co známe odjinud

$$Q = C - \frac{\cos\omega t}{L\omega^2} = C - C\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t = C\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right).$$

6b. Srovnání metody řešení diferenciálních rovnic rozvojem v řadu s metodou řešení rozkladem v parciální zlomky.

Metodu řešení rozkladem v parciální zlomky lze odvoditi z operátorové rovnice podstatně snadno; rovněž propočítání příkladu nebylo pracné. Bylo sice pracnější než „klasickou“ metodou; hlavní výhoda je patrná teprve u složitějších příkladů. Pomocí tabulek lze podati posléze zmíněnou metodou řešení pro libovolný čas t, kdežto metoda řešení rozvojem v řadu podává pro velká t výsledky numerické jen pracnou cestou. Z řešení, které dostaneme metodou řešení rozkladem v parciální zlomky, je okamžitě patrná stavba řešení a vliv jednotlivých členů sítě.

Zmíněné přednosti metody řešení rozkladem v parciální zlomky nelze označiti jako specifické této metody; hlavní nesnáze se objevují při stanovení kořenů rovnice $H(p) = 0$, jedná-li se o síť s více stupni volnosti. V tomto případě závisí výhodnost uvažované metody (stejně jako metody řešení rozvojem v řadu) na tom, zda se podaří výraz získaný jako řešení zjednodušiti.

V. Obecné věty a formule pro řešení operátorových rovnic.

7. Obrácení původní úlohy.

Viděli jsme, že operátorová rovnice

$$h = \frac{1}{H(p)}$$

představuje symbol za integrální rovnici

$$\frac{1}{pH(p)} = \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Používajíce této integrální rovnice, odvodili jsme metodu řešení rozvojem v řadu a metodu řešení rozkladem v parciální zlomky. Můžeme však také z každého (odjinud) známého řešení integrální rovnice odvoditi řešení rovnice operátorové. Také lze předpokládati, že časová funkce je dána, a pomocí integrální rovnice dostaneme řešení příslušné rovnice operátorové. Fysikální podstatou této obrácené úlohy je, že se tážeme po způsobu zapojení systému, v němž je předepsán tvar proudové křivky.

8. Výpočet některých omezených integrálů.

Velký počet integrálů tvaru

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

lze vyčísliti. Můžeme tedy používajíce těchto integrálů nalézti řešení operátorové rovnice. Proto uvedu v dalším některé omezené integrály v explicitním tvaru; jsou to integrály citované z knihy Carsonovy (Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung, str. 35):

a) $$\int_0^\infty e^{-pt} \,.\, e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{p+\lambda},$$

b) $$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{t^n}{n!}\, dt = \frac{1}{p^{n+1}}$$ (opětovným integrováním „per partes“).

$$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{(p+\lambda)^{n+1}},$$

oboje pro n celistvé a kladné.

c) $$\int_0^\infty e^{-pt} \sin \lambda t\, dt = \frac{\lambda}{p^2+\lambda^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} \cos \lambda t\, dt = \frac{p}{p^2+\lambda^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} \,.\, e^{-\mu t} \sin \lambda t\, dt = \frac{\lambda}{(p+\mu)^2+\lambda^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} .\, e^{-\mu t} \cos \lambda t\, dt = \frac{p+\mu}{(p+\mu)^2+\lambda^2},$$

d) $$\int_0^\infty \frac{e^{-pt}\, dt}{\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{\sqrt{p}},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-pt}\,(2t)^n}{\sqrt{\pi t}\,.\,1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}\, dt = \frac{1}{p^n\sqrt{p}},$$

e) $$\int_0^\infty \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \,.\, \frac{e^{-(pt+\lambda/t)}}{t\sqrt{t}}\, dt = e^{-2\sqrt{\lambda p}};$$

f) derivujeme-li vztah e) podle p a násobíme $1/\sqrt{\lambda}$ dostaneme:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(pt+\lambda/t)}}{\sqrt{\pi t}}\, dt = \frac{e^{-2\sqrt{\lambda p}}}{\sqrt{p}};$$

g) Besselovy funkce jsou definovány

$$J_n(\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j\varrho \cos\beta} \,.\, e^{jn(\beta - \frac{1}{2}\pi)}\, d\beta;$$

dosazením této hodnoty lze se přesvědčiti o správnosti vztahů:

$$\int_0^\infty e^{-pt} J_0(\lambda t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \lambda^2}},^*$$

$$\int_0 e^{-pt} e^{-\lambda t} J_0(j\lambda t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 2\lambda p}},$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} J_n(\lambda t)\, dt = \frac{1}{r}\left(\frac{r - p}{\lambda}\right)^n, \quad \text{kde } r^2 = p^2 + \lambda^2,$$

$$h) \quad \int_\lambda^\infty e^{-pt} J_0\left(\sqrt{t^2 - \lambda^2}\right) dt = \frac{e^{-\lambda\sqrt{p^2+1}}}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

9. Věta Borelova.

Uvedu nejprve větu Borelovu, které v dalším několikráte použijeme.**)

Funkce $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ buďtež definovány těmito integrálními rovnicemi:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

$$F_1(p) = \int_0^\infty f_1(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{36}$$

$$F_2(p) = \int_0^\infty f_2(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Funkce F, F_1, F_2 nechť jsou kromě toho vázány vztahem:

$$F(p) = F_1(p) \,.\, F_2(p); \tag{37}$$

pak

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t - \tau)\, d\tau = \int_0^t f_2(\tau)\, f_1(t - \tau)\, d\tau. \tag{38}$$

---

*) Poučení o Besselových funkcích lze nalézti ve spise: Gray-Mathews 1922: A treatise on Bessel Functions (první tři integrály jsou na str. 76, př. 10, 14 druhý a první); též Riemann-Weber: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, II. sv., str. 544; 1927.

**) Borel: Leçons sur les séries divergentes (1901), str. 104.

10. Věta adiční.

Jestliže v operátorové rovnici $h = 1/H(p)$ lze obecnou kmenovou funkci $H(p)$ psáti ve tvaru součtu

$$\frac{1}{H(p)} = \frac{1}{H_1(p)} + \frac{1}{H_2(p)} + \ldots + \frac{1}{H_n(p)}, \tag{39}$$

a platí-li pro jednotlivé sčítance operátorové rovnice

$$h_1 = \frac{1}{H_1(p)}, \; h_2 = \frac{1}{H_2(p)}, \ldots, h_n = \frac{1}{H_n(p)}, \tag{40}$$

lze řešení, jak plyne z definice integrálu, při konečném počtu sčítanců psáti ve tvaru

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n.$$

11. Pravidlo o násobení kmenové funkce operátorem.

Dvě funkce $h(t)$ a $g(t)$ jsou definovány operátorovými rovnicemi

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{H(p)}, \\ g &= \frac{1}{pH(p)}. \end{aligned} \tag{41}$$

Ekvivalentní integrální rovnice jsou:

$$\frac{1}{pH(p)} = \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{42}$$

$$\frac{1}{p\,[pH(p)]} = \frac{1}{p^2 H(p)} = \int_0^\infty g(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{43}$$

Aplikujme na rovnici (43) Borelovu větu. Funkce f_1 a f_2, přicházející ve větě Borelově, jsou v našem případě definovány rovnicemi

$$\frac{1}{p} = \int_0 f_1(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

$$\frac{1}{pH(p)} = \int f_2(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Řešení těchto rovnic je známo (o prvém se přesvědčíme integrováním, druhé předpokládáme):

$$f_1(t) = 1$$
$$f_2(t) = h(t).$$

Aplikujeme-li větu Borelovu, plyne z rovnic (42) a (43)

$$g(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau. \tag{44}$$

Z rovnic (41) plyne vztah (44).

12. Věta o dělení kmenové funkce operátorem.

Funkce $h = h(t)$ a $g = g(t)$ buďtež definovány operátorovými rovnicemi:

$$h = \frac{1}{H(p)}, \tag{45}$$

$$g = \frac{p}{H(p)}, \tag{46}$$

a nechť kromě toho platí $h(0) = 0$. Příslušné ekvivalentní integrální rovnice znějí:

$$\frac{1}{pH(p)} = \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

$$\frac{p}{pH(p)} = \frac{1}{H(p)} = \int_0^\infty g(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Provedeme-li na pravé straně prvé rovnice integraci „per partes“, dostaneme:

$$\frac{1}{pH(p)} = \left[-\frac{1}{p}\, h(t)\, e^{-pt}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty h'(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

$$\frac{1}{pH(p)} = \frac{h(0)}{p} + \frac{1}{p}\int_0^\infty h'(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Je-li podle předpokladu $h(0) = 0$, obdržíme

$$\frac{1}{H(p)} = \int_0^\infty h'(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Srovnáme-li tuto integrální rovnici s rovnicí pro $g(t)$, plyne okamžitě, že

$$g(t) = h'(t), \tag{47}$$

neboť integrální rovnice určuje funkci jednoznačně. Věta o násobení a věta o dělení kmenové funkce operátorem tvoří základ Heavisidova pravidla, podle něhož $1/p$ nahrazuje symbol $\int\limits_0^t dt$ a p nahrazuje symbol d/dt.

13. Multiplikační teorém.

Nechť funkci $H(p)$, jež hoví operátorové rovnici $h = 1/H(p)$, lze rozložiti v součin

$$H(p) = H_1(p) \,.\, H_2(p) \tag{48}$$

a nechť jednotlivé funkce H_1, H_2 hoví taktéž operátorovým rovnicím

$$h_1 = \frac{1}{H_1(p)} \tag{49}$$

$$h_2 = \frac{1}{H_2(p)}. \tag{50}$$

Integrální rovnice odpovídající rovnicím operátorovým znějí:

$$\frac{1}{pH(p)} = p \cdot \frac{1}{pH_1(p)} \cdot \frac{1}{pH_2(p)} = \int\limits_0^\infty h(t)\, e^{-pt} dt \tag{51}$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{pH_1(p)} = \int\limits_0^\infty h_1(t)\, e^{-pt}\, dt \\ F_2 &= \frac{1}{pH_2(p)} = \int\limits_0^\infty h_2(t)\, e^{-pt}\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Definujeme-li pomocnou funkci $g(t)$ operátorovou rovnicí:

$$g \doteq \frac{1}{pH(p)},$$

pak plyne

$$F \equiv \frac{1}{pH_1(p)} \cdot \frac{1}{pH_2(p)} = \int\limits_0^\infty g(t)\, e^{-pt} dt. \tag{53}$$

Použijeme-li nyní věty Borelovy, plyne

$$g(t) = \int_0^t h_1(\tau)\, h_2(t - \tau)\, d\tau = \int_0^t h_2(\tau)\, h_1(t - \tau)\, d\tau. \tag{54}$$

Okamžitě je patrno, že $g(0) = 0$; srovnáme-li operátorovou rovnici pro $h(t)$ a $g(t)$, plyne z věty o dělení

$$h(t) = \frac{d}{dt}\, g(t).$$

Dostaneme tedy definitivně: Platí-li rovnice (48), (49) a (50), plyne, že

$$h(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t h_1(\tau)\, h_2(t - \tau)\, d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t h_2(\tau)\, h_1(t - \tau)\, d\tau. \tag{55}$$

14. Věta o posouvání kmenové funkce.

Nechť dvě funkce $h = h(t)$ a $g = g(t)$ jsou definovány operátorovými rovnicemi

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{H(p)} \\ g &= \frac{1}{H(p + \lambda)}; \end{aligned} \tag{56}$$

λ je reálný, kladný parametr. Integrální rovnice, s nimiž jsou tyto operátorové rovnice ekvivalentní, jsou

$$\begin{aligned} \frac{1}{pH(p)} &= \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt \\ \frac{1}{pH(p + \lambda)} &= \int_0^\infty g(t)\, e^{-pt}\, dt; \end{aligned} \tag{57}$$

pišme v prvé rovnici (57) $p + \lambda$ místo p:

$$\frac{1}{p + \lambda} \cdot \frac{1}{H(p + \lambda)} = \int_0^\infty h(t)\, e^{-\lambda t} \,.\, e^{-pt}\, dt; \tag{58}$$

integrální rovnici pro $g(t)$ lze přepsati ve tvaru

$$\left(1 + \frac{\lambda}{p}\right) \frac{1}{(p + \lambda)\, H(p + \lambda)} = \int_0^\infty g(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{59}$$

Srovnáním rovnic (58) a (59) plyne vzhledem k větě o násobení výrazem $1/p$

$$g(t) = \left\{1 + \lambda \int_0^t dt\right\} e^{-\lambda t} h(t). \tag{60}$$

Zajímavý výsledek dostaneme, předpokládáme-li, že funkce $h(t)$ a $g(t)$ jsou definovány operátorovými rovnicemi:

$$h = \frac{1}{H(p)}$$

$$g = \frac{p}{(p + \lambda) H(p + \lambda)}.$$

Příslušné integrální rovnice jsou

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{pH(p)} &= \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt \\ \frac{1}{(p+\lambda) H(p+\lambda)} &= \int_0^\infty g(t)\, e^{-pt}\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{58'}$$

Srovnáním (58) a (58′) plyne

$$g(t) = h(t)\, e^{-\lambda t}.$$

15. Věta o podobnosti kmenové funkce.

Buďtež funkce $h(t)$ a $g(t)$ definovány operátorovými rovnicemi

$$h = \frac{1}{H(p)}, \quad g = \frac{1}{H(\lambda p)}, \tag{61}$$

kdež λ je reálný, kladný parametr. Ekvivalentní integrální rovnice jsou

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{pH(p)} &= \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt \\ \frac{1}{pH(\lambda p)} &= \int_0^\infty g(t)\, e^{-pt}\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

V prvé rovnici pišme λp místo p, t/λ místo t; obdržíme:

$$\frac{1}{pH(\lambda p)} = \int_0^\infty h\left(\frac{t}{\lambda}\right) e^{-pt}\, dt. \tag{63}$$

Srovnáme-li rovnici (62) a (63), plyne

$$g(t) = h\left(\frac{t}{\lambda}\right). \qquad 64)$$

Této věty o podobnosti se používá hlavně při transformaci času a při eliminaci nepohodlných konstant.

16. Věta o dilataci kmenové funkce.

Nechť jsou funkce $h = h(t)$ a $g = g(t)$ definovány operátorovými rovnicemi

$$h = \frac{1}{H(p)}, \quad g = \frac{e^{-\lambda p}}{H(p)}, \qquad (65)$$

kdež $\lambda > 0$ (tedy reálné); pak plyne, že

$$g(t) = 0 \text{ pro } t < \lambda$$
$$g(t) = h(t) \text{ pro } t > \lambda.$$

Věty této se používá při úlohách týkajících se šíření vln podél vedení s konečnou rychlostí.

Definujme si pomocnou funkci $k = k(t)$ operátorovou rovnicí

$$k = e^{-\lambda p};$$

pak užijeme-li multiplikační věty (55), platí

$$g(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t k(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau. \qquad (66)$$

Operátorová rovnice $k = e^{-\lambda p}$ je ekvivalentní s integrální rovnicí

$$\frac{1}{pe^{\lambda p}} = \int_0^\infty k(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Pišme tuto rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{pe^{\lambda p}} = \int_0^\lambda k(t)\, e^{-pt}\, dt + \int_\lambda^\infty k(t)\, e^{-pt}\, dt;$$

dosazením se lze přesvědčiti, že rovnici se vyhoví, když

$$k(t) = 0 \text{ pro } t < \lambda$$
$$k(t) = 1 \text{ pro } t > \lambda.$$

Z toho plyne pro rovnici (66):

$$g(t) = 0 \text{ pro } t < \lambda \qquad (67)$$

$$g(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t h(t-\tau)\,d\tau \quad \text{pro } t > \lambda.$$

$\int_0^t h(t-\tau)\,d\tau$ jeví se jako funkce t takto: jednak při pevných mezích závisí na t prostřednictvím funkce h, jednak závisí na t prostřednictvím své horní hranice. Podle toho musíme provésti derivování:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t h(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{dh(t-\tau)}{dt}\,d\tau + h(t-t) =$$

$$= -\int_0^t \frac{dh(t-\tau)}{d\tau}\,d\tau + h(0) = -h(0) + h(t) + h(0) = h(t).$$

Tudíž

$$g(t) = h(t) \text{ pro } t > \lambda. \tag{68}$$

17. Operátorová rovnice pro libovolné napětí.

V rovnici (15) jsme označili $x(t)$ intensitu proudu v síti, jež původně byla v rovnováze a na niž v čase $t = 0$ bylo vloženo libovolné napětí; značme je $U = f(t)$. Ve svých pozdějších úvahách jsme se omezili na jednotkové napětí a označili jsme příslušný proud $h(t)$.

Platilo

$$x(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t h(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau \tag{14')*}$$

a

$$\frac{1}{pH(p)} = \int_0^\infty h(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Nechť nyní napětí $U = f(t)$ je toho druhu, že integrál

$$\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt$$

lze spočísti:

$$\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt = \frac{F(p)}{p}.$$

*) (14') plyne z (14) substitucí $t - \tau = t'$.

Tento případ skutečně nastává pro mnohá napětí, na př. napětí sinusové.

Operátorová rovnice, odpovídající integrální rovnici

$$\frac{1}{pH(p)} = \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

je

$$h = \frac{1}{H(p)};$$

podobně rovnici

$$\frac{F(p)}{p} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

odpovídá rovnice

$$f(t) = F(p).$$

Připíšeme-li rovnici

$$x(t) = \frac{d}{dt} \int_0 h(\tau)\, f(t - \tau)\, d\tau, \tag{14'}$$

již pokládáme za výsledek použití multiplikační věty, pak plyne pro $x(t)$ integrální rovnice

$$\frac{F(p)}{pH(p)} = \int_0^\infty x(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Takto jsme převedli vyšetřování vlastností sítě při libovolném napětí na řešení integrální rovnice téže stavby jako při jednotkovém napětí. Tím jsme provedli rozšíření použití operátorového počtu pro libovolná napětí vložená na síť.

Je-li chování sítě určeno operátorovou rovnicí

$$h = \frac{1}{H(p)}$$

v případě, že v čase $t = 0$ bylo vloženo na síť jednotkové napětí, pak vložíme-li napětí libovolné, určené operátorovou rovnicí

$$E = U(p)$$

nebo rovnocennou integrální rovnicí

$$\int_0^\infty E(t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{U(p)}{p},$$

pak je chování sítě dáno rovnicí

$$x(t) = \frac{U(p)}{H(p)}. \tag{69}$$

Při tom je nutno $x(t)$ určiti z integrální rovnice

$$\frac{U(p)}{pH(p)} = \int_0^\infty x(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{70}$$

18. Řešení za použití pomocné rovnice.

Lze-li uvésti operátorovou rovnici

$$h = \frac{1}{H(p)}$$

na tvar

$$h = \frac{F(p)}{1 + \lambda K(p)},$$

kde λ je reálný parametr, a jsou-li pomocné funkce $f = f(t)$ a $k = k(t)$ definovány rovnicemi

$$f = F(p)$$
$$k = K(p),$$

pak se určí funkce $h(t)$ Volterovou integrální rovnicí

$$h(t) = f(t) - \lambda \frac{d}{dt} \int_0^t h(\tau)\, k(t - \tau)\, d\tau.$$

Této věty se používá, jestliže vyčíslení operátorové rovnice a ekvivalentní integrální rovnice poskytuje obtíže.

Abychom tutu větu dokázali, vyjdeme z rovnice $h = 1/H(p)$. Operátorovou rovnici

$$h = \frac{F(p)}{1 + \lambda K(p)}$$

lze uvésti v důsledku $h = 1/H(p)$ na tvar:

$$h + \lambda \frac{K(p)}{H(p)} = F(p)$$

$$h = F(p) - \lambda \frac{K(p)}{H(p)},$$

nebo, použijeme-li věty Borelovy,

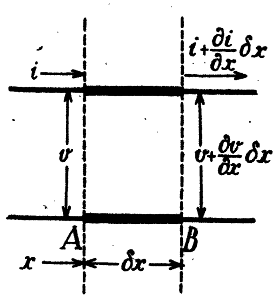
$$h(t) = f(t) - \lambda \frac{d}{dt} \int_0^t h(\tau)\, k(t - \tau)\, d\tau.$$

Všechny zde uvedené věty společně se znalostí citovaných integrálů a s metodou řešení pomocí rozvoje v řadu a rozkladu v parciální zlomky poskytují výzbroj pro použití operátorového počtu v praxi.

VI. Příklady.

19. Vedení. Odvození rovnice.

Uvažujme dvojité vedení; ohmický odpor (obou drátů) na délkovou jednotku označme R, koeficient samoindukce L, kapacitu C a isolační odpor W — po případě jeho převrácenou hodnotu (svod) G. Zdroj elektromotorické síly si myslíme umístěn na počátku vedení. Vytkněme si z toho vedení velmi malý element délky δx a sice ve vzdálenosti x od zdroje. Ohmický odpor toho



Obr. 3.

elementu je $R\delta x$, svod $G\delta x$, samoindukce $L\delta x$ a kapacita $C\delta x$. Napětí v bodě A označme v; v bodě B bude $v + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x$. Proud při A označíme i; při B je $i + \frac{\partial i}{\partial x}\delta x$ (obr. 3). Volíme-li δx dosti malé, platí

$$v - \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x\right) = R\delta x \,.\, i + L\delta x \,.\, \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x}\delta x\right) = G\delta x \,.\, v + C\delta x \,.\, \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Z toho

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{71}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gv + C\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{72}$$

20. Neinduktivní kabel beze svodu.

V tomto speciálním případě se rovnice (71) a (72) značně zjednoduší. Především $L = 0$ (neinduktivní kabel); dále $G = 0$ (beze svodu; oba vodiče jsou odděleny ideálním dielektrikem). Rovnice (71) a (72) přejdou v rovnice

$$Ri = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{73}$$

$$C\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}. \tag{74}$$

Symbol $\partial/\partial t$ nahradíme symbolem p

$$\begin{aligned} Ri &= -\frac{dv}{dx} \\ Cpv &= -\frac{di}{dx}. \end{aligned} \tag{75}$$

Eliminujeme-li jednou v a jednou i, obdržíme:

$$\begin{aligned} pCRi &= \frac{d^2i}{dx^2} \\ pCRv &= \frac{d^2v}{dx^2}. \end{aligned} \tag{76}$$

Označíme-li kořeny charakteristické rovnice $\gamma = \sqrt{CpR}$, dostaneme

$$\begin{aligned} v &= v_1 e^{-\gamma x} + v_2 e^{+\gamma x} \\ i &= -\frac{1}{R}\frac{dv}{dx} = \sqrt{\frac{Cp}{R}}(v_1 e^{-\gamma x} - v_2 e^{+\gamma x}); \end{aligned} \tag{77}$$

v_1, v_2 jsou konstanty, jež se určí z počátečních podmínek.

Předpokládejme, že kabel je neomezený! Ježto první sčítanec rovnice (77) značí vlnu šířící se z počátku, druhý sčítanec vlnu odraženou, je patrno, že v našem případě druhý sčítanec odpadne.

Na kabel bylo vloženo na jeho počátku ($x = 0$) napětí $v = v_0$. Nabývají tedy rovnice (77) tvaru

$$v = v_0 e^{-x\sqrt{CpR}} = v_0 e^{-\sqrt{ap}}$$

$$i = \sqrt{\frac{Cp}{R}}\, v_0 e^{-x\sqrt{CpR}} = \sqrt{\frac{Cp}{R}}\, v_0 e^{-\sqrt{ap}}, \tag{78}$$

kdež $\alpha = x^2RC$ (místní časová konstanta).

Specialisujme vložené napětí; nechť $v_0 = 1$; obdržíme:

$$v = e^{-\sqrt{ap}}$$

$$i = \sqrt{\frac{Cp}{R}}\, e^{-\sqrt{ap}}. \tag{79}$$

Na začátku kabelu ($x = 0$) je $\alpha = 0$; tedy

$$v_0 = 1$$

$$i_0 = \sqrt{\frac{Cp}{R}}.$$

Integrální rovnice, jež odpovídá operátorové rovnici

$$i_0 = \sqrt{\frac{Cp}{R}}.$$

je

$$\sqrt{\frac{C}{pR}} = \int_0^\infty i_0(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Řešení dostaneme jednoduchým způsobem používajíce vzorce *d*) v soupisu integrálů v odst. 8

$$i_0 = \sqrt{\frac{C}{R\pi t}}. \tag{80}$$

Z rovnice (80) by plynulo, že pro $t = 0$ je proud nekonečně veliký. Tento protismyslný výsledek pochází odtud, že jsme zanedbali samoindukci kabelu.

Vraťme se opět k rovnicím (79) platným na libovolném místě kabelu

$$v = e^{-\sqrt{ap}}$$

$$i = \sqrt{\frac{Cp}{R}}\, e^{-\sqrt{ap}}. \tag{79}$$

Integrální rovnice, jež je ekvivalentní s prvou operátorovou rovnicí (79), zní

$$\frac{e^{-\sqrt{ap}}}{p} = \int_0^\infty v(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Je-li funkce $\Phi(t)$ definována integrální rovnicí

$$e^{-\sqrt{ap}} = \int_0^\infty \Phi(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

plyne z věty o násobení kmenové funkce operátorem, že

$$v(t) = \int_0^t \Phi(t)\, dt.$$

Z formule *e*) v soupisu integrálů plyne

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, \frac{e^{-\alpha/4t}}{t\sqrt{t}}$$

a tudíž

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau \frac{e^{-1/\tau}\, d\tau}{\tau\sqrt{\tau}}, \quad \text{kdež } \tau = \frac{4t}{\alpha} = \frac{4t}{x^2RC}. \tag{81}$$

Pišme:

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-1/\tau}}{\tau\sqrt{\tau}}\, d\tau - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\tau^\infty \frac{e^{-1/\tau}\, d\tau}{\tau\sqrt{\tau}}.$$

Ježto integrál v prvém sčítanci se rovná $\sqrt{\pi}$, platí, že

$$v(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\tau^\infty \frac{e^{-1/\tau}\, d\tau}{\tau\sqrt{\tau}}.$$

Proveďme zde substituci:

$$\frac{1}{\tau} = \tau'^2, \quad d\tau = -\frac{2}{\tau'^3}\mathrm{d}\tau'.$$

Tím obdržíme (vynecháme-li pak čárky u integrační proměnné)

$$v = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{1/\sqrt{\tau}} e^{-\tau^2}\, d\tau. \tag{82}$$

Neúplný integrál v tomto vzorci přicházející je tabelován. Výraz pro proud (v libovolném místě) je:

$$i = -\frac{1}{R}\frac{dv}{dx}.$$

Ježto ale

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dx},$$

plyne za použití vzorce (81)

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2}{x\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-1/\tau}}{\sqrt{\tau}}$$

čili

$$i = \frac{2}{xR}\,\frac{e^{-1/\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} = \sqrt{\frac{C}{\pi Rt}}\,e^{-1/\tau}. \tag{83}$$

20a. Diskuse výsledku.

Z formule (82) plyne, že $v = v(\tau) = v\left(\frac{4t}{x^2RC}\right)$; stejně $i = i\left(\frac{4t}{x^2RC}\right) \backsim \frac{1}{xR}$.

Je tedy patrno, že u všech možných kabelů závisí stejným způsobem tvar vlny napětí i proudu na „numerickém čase" $4t/x^2RC$. Křivky pro všecky kabely (beze svodu a samoindukce) mají stejný tvar. Průběh je znázorněn v obr. 4 a 5.

Z obr. 4 je patrno, že proudová vlna je pro všechna $t > 0$ konečná, takže by byla rychlost šíření v našem idealisovaném kabelu nekonečně veliká. Příčinu toho dlužno hledati v tom, že jsme položili $L = 0$.

Proud je pro malé hodnoty τ také malý; od $\tau = 0{\cdot}2$ nastává rychlý vzestup, pro $\tau = 2$ dosahuje proud největší hodnoty. Odtud zvolna klesá a blíží se asymptoticky nule.

Rovněž napětí nabývá až asi do $\tau = 0{\cdot}25$ malých hodnot (obr. 5).

Naprosto universální závislost proudu a napětí na numerickém čase $\tau = 4t/x^2RC$ je základem Kelvinova zákona, který zní: Počet znamének, jež lze přenésti pomocí (neinduktivního) kabelu (beze svodu), je obráceně úměrný součinu z úhrnné kapacity a úhrnného odporu kabelu.

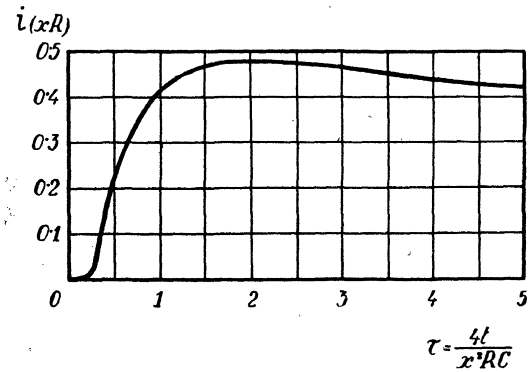
Telegrafní znamení, jež jsou čárky a tečky, vznikají tak, že se na kabel vloží napětí po delší nebo kratší dobu; v intervalech mezi značkami je kabel spojen na krátko. Toto spojení na krátko lze formálně nahraditi napětím obráceného směru, jež je spojeno v serii s původním napětím, budícím značky. Označíme-li t_1 dobu trvání prvého impulsu, $t_2 - t_1$ prvé pausy, $t_3 - t_2$ dobu trvání druhé značky atd., je proud při telegrafování vyjádřen výrazem

$$i(t) - i(t - t_1) + i(t - t_2) - i(t - t_3) + i\,(t - t_4) + \ldots$$

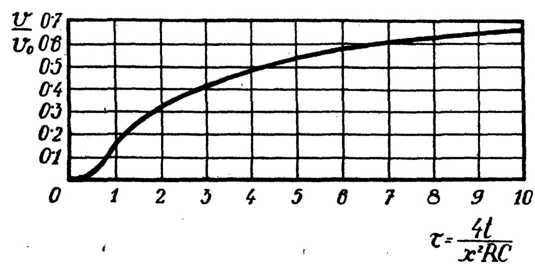
$i(t)$ je určeno vztahem (83); podle rovnice (83) platí

$$i(t) = \frac{2e^{-1/\tau}}{xR\sqrt{\pi\tau}} = \frac{2}{xR\sqrt{\pi}}\,\Phi(\tau),$$

kde $\tau = \frac{4t}{x^2RC} = \frac{4t}{\mathbf{KR}}$ (**K**, **R** po anglickém způsobu značí úhrnnou kapacitu a úhrnný odpor kabelu).



Obr. 4.



Obr. 5.

Ježto

$$\tau_1 = \frac{4t_1}{x^2RC}$$

$$\tau_2 = \frac{4t_2}{x^2RC} \text{ atd.},$$

lze psáti proud, následuje-li více telegrafních značek po sobě, ve tvaru

$$\frac{2}{xR\sqrt{\pi}}\left[\Phi(\tau) - \Phi(\tau - \tau_1) + \Phi(\tau - \tau_2) - \ldots\right].$$

Udržujeme-li relativní časové intervaly $\tau_1, \tau_2, \ldots$ konstantní a měníme-li délku kabelu, jsou absolutní časy $t_1, t_2, \ldots$ úměrné x^2RC čili **K**, **R** a vlnový tvar celého znamení nezávisí na **K**, **R**, pokud udržujeme konstantní numerické časy trvání znamení a klidu. Z toho plyne, že celkové trvání signálu je úměrné x^2CR (nebo **K R**). Jestliže tedy částečné trvání signálu je úměrné úhrnnému odporu a kapacitě kabelu, je vlnový tvar přicházející značky vzhledem k proměnné τ nezávislý a absolutní čas potřebný k přenosu signálu je úměrný celkové kapacitě a odporu.

Maximální rychlost telegrafování je určena požadavkem, aby přijímané značky byly ještě podobné značkám vysílaným, t. j. při maximální rychlosti telegrafování smí nastati maximální zkreslení. Z toho plyne, že dva kabely stejně zkreslují, jsou-li telegrafní rychlosti v obráceném poměru součinu úhrnné kapacity a odporu kabelu. Další důsledek je, že lze telegrafovati jen čtyřikrát pomaleji — připustíme-li stejné zkreslení — vzroste-li délka kabelu dvakrát.

Nechť T je numerický čas trvání bodové značky; pak lze psáti

$$\begin{aligned} D &= i(\tau) && \text{pro } \tau < T \\ D &= i(\tau) - i(\tau - T) && \text{pro } \tau > T. \end{aligned}$$

Rozvineme-li druhý výraz v Taylorovu řadu, obdržíme:

$$D = T \frac{d}{d\tau} i(\tau) - \frac{T^2}{2!} \frac{d^2}{d\tau^2} i(\tau) + \ldots$$

Je-li T malé,

$$D = Ti'(\tau).$$

Vidíme, že amplituda přijímaného znamení je úměrná době trvání značky.

Nechť nyní bodová značka je vzbuzena naprosto libovolnou elektromotorickou silou $f(t)$, jež působila po krátkou dobu T. Pak tvar přijaté značky je

$$D = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau)\, i(t - \tau)\, d\tau \qquad \text{pro } t < T$$

$$D = \frac{d}{dt} \int_0^T f(\tau)\, i(t - \tau)\, d\tau \qquad \text{pro } t > T.$$

Rozvineme-li pro $t > T$ v řadu, obdržíme

$$D = i'(t) \int_0^T f(\tau)\, d\tau - i''(t) \int_0^T \tau f(\tau)\, d\tau + \ldots$$

Pro T velmi malé plyne

$$D = i'(t) \int_0^T f(\tau)\, d\tau.$$

Je-li časový interval, po nějž se znamení vysílá, dosti krátký, **nezávisí tvar přijímaného znamení na tvaru vtištěného napětí** a amplituda proudu přijímané značky je úměrná časovému integrálu vtištěného napětí.

21. Neinduktivní kabel se svodem.

Jisté zevšeobecnění provedeme, budeme-li předpokládati, že $G \neq 0$ ($L = 0$ stále). Pak rovnice děje v kabelu znějí:

$$Ri = -\frac{dv}{dx}$$
$$(Cp + G)\, v = -\frac{di}{dx}. \tag{84}$$

V našich úvahách — a tedy i ve výsledku — se nic nezmění, jen je nutno psáti $Cp + G$ místo Cp.

Dostaneme tedy pro kabel se svodem:

$$i_0 = \sqrt{\frac{Cp + G}{R}} = \sqrt{\frac{C}{R}\,(p + \lambda)}, \tag{85}$$

označíme-li $G/R = \lambda$. Příslušná integrální rovnice je

$$\frac{1}{p}\sqrt{\frac{C(p + \lambda)}{R}} = \int_0^\infty i_0(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Tuto rovnici lze přepsati ve tvaru:

$$\frac{p + \lambda}{p} \cdot \frac{1}{p + \lambda} \sqrt{\frac{C}{R}\,(p + \lambda)} = \int_0^\infty i_0(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$\left(1 + \frac{\lambda}{p}\right) \sqrt{\frac{C}{R\,(p + \lambda)}} = \int_0^\infty i_0(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Označíme $I(t)$ řešení integrální rovnice

$$\frac{1}{\sqrt{p + \lambda}} = \int_0^\infty I(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{86}$$

Užijeme-li adiční věty a věty o násobení kmenové funkce operátorem,

$$i_0(t) = \sqrt{\frac{C}{R}} \left(1 + \lambda \int_0^t dt\right) I(t).$$

Řešení rovnice (86) plyne z rovnice *d*) odst. 8

$$I(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{\pi t}}.$$

Je tedy řešení rovnice (85) v konečném tvaru

$$i_0(t) = \sqrt{\frac{C}{\pi R}} \left(\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}} + \lambda \int_0^t \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}} dt\right). \tag{87}$$

Proveďme v rovnici (87) integraci „per partes“:

$$\int_0^t \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^t e^{-\lambda t} d\sqrt{t} = [2\sqrt{t} e^{-\lambda t}]_0^t + 2\lambda \int_0^t \sqrt{t} e^{-\lambda t} dt =$$

$$= 2\sqrt{t} e^{-\lambda t} + 2\lambda \tfrac{2}{3} \int_0^t e^{-\lambda t} d(\sqrt{t^3}) = 2\sqrt{t} e^{-\lambda t} \left\{1 + \frac{2\lambda t}{1.3} + \frac{(2\lambda t)^2}{1.3.5} + \ldots\right\}.$$

Dostaneme tudíž:

$$i_0(t) = \sqrt{\frac{C}{\pi R}} e^{-\lambda t} \left\{1 + 2\lambda t \left(1 + \frac{2\lambda t}{1.3} + \frac{(2\lambda t)^2}{1.3.5} + \ldots\right)\right\}. \tag{88}$$

Rozvineme-li $e^{-\lambda t}$ v řadu a upravíme, dostaneme:

$$i_0 = \sqrt{\frac{C}{\pi R t}} \left\{1 + \frac{2\lambda t}{2} - \frac{(2\lambda t)^2}{1.2.3.4} + \frac{1.3(2\lambda t)^3}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right\}. \tag{89}$$

Asymptotickou řadou nazýváme rozvoj, který sice diverguje, ale jehož můžeme použíti k numerickým výpočtům pro dosti velký argument.

Všimneme si rovnice (89); v rovnici (89) musíme použíti dosti velkého počtu členů v důsledku alternujících znamének. Tento příklad má tu vlastnost, že řešení ve formě omezeného integrálu je jednodušší než řešení rozvojem v řadu.

Omezený integrál v rovnici (87) lze upraviti:

$$\int_0^t \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}} dt - \int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Dále lze psáti:

$$\int_0^t \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} - \int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Mimo to platí:

$$\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{1}{\lambda}\int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\,d(e^{-\lambda t}) = \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda\sqrt{t}}\right]_t^\infty -$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t\sqrt{t}}\,dt = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda\sqrt{t}} - \frac{1}{2\lambda}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda\sqrt{t}} - \frac{1}{2\lambda^2}\cdot\frac{e^{-\lambda t}}{t\sqrt{t}} + \frac{1\,.\,3}{2^2\lambda^2}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t^2\sqrt{t}}\,dt.$$

Provádíme-li — jak naznačeno — parciální integraci dále, dostaneme

$$\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda\sqrt{t}}\left\{1 - \frac{1}{2\lambda t} + \frac{1\,.\,3}{(2\lambda t)^2} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{(2\lambda t)^3} + \ldots\right.$$

$$\ldots + (-1)^n\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{(2\lambda t)^n} -$$

$$\left. -\frac{(-1)^n}{\lambda}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n+1)}{2\,.\,(2\lambda)^n}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda t}\,dt}{t^{n+1}\sqrt{t}}\right\}.$$

Tato řada diverguje; jdeme-li dosti daleko, členy rostou. Přerušíme-li řadu u n-tého členu, je chyba co do absolutní hodnoty menší než

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{(2\lambda t)^n}.$$

Ježto je chyba při přerušení u n-tého členu menší než tento člen, je patrno, že přerušíme-li u nejmenšího členu, je chyba nejmenší. S rostoucím t pak dále se menší. Lze tedy psáti místo rovnice (87), sloučíme-li vhodně,

$$i_0 = \sqrt{\frac{\lambda C}{R}} + \sqrt{\frac{C}{\pi R t}}\,e^{-\lambda t}\left\{\frac{1}{2\lambda t} - \frac{1\,.\,3}{(2\lambda t)^2} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{(2\lambda t)^3} - \ldots\right\}.$$

Zde $\lambda = G/C$; první člen tohoto rozvoje je tudíž $\sqrt{G/R}$; on značí vstupní vodivost kabelu pro stejnosměrný proud. Rozvoj praví, že proud se asymptoticky blíží této hodnotě.

Tažme se nyní na časový průběh proudu a napětí v libovolném bodě kabelu se svodem. Je-li vložené napětí v_0, platí tyto operátorové rovnice (plynou, jak jsme viděli, z rovnic (78) pro kabel beze svodu, píšeme-li $Cp + G$ místo Cp)

$$v = e^{-x\sqrt{CpR + RG}} \,.\, v_0$$

$$i = \sqrt{\frac{Cp}{R} + \frac{G}{R}} \,.\, e^{-x\sqrt{CpR + RG}} \,.\, v_0.$$

Zavedeme-li zkratky $\alpha = x^2CR$, $\beta = x^2GR$, $G/C = \lambda = \beta/\alpha$; klademe-li kromě toho ještě $v_0 = 1$, obdržíme:

$$v = e^{-\sqrt{\alpha p + \beta}}$$

$$i = \sqrt{\frac{C}{R}} \,.\, \sqrt{p + \lambda} \,.\, e^{-\sqrt{\alpha p + \beta}}.$$

Označíme-li napětí a intensitu v libovolném místě kabelu bez svodu $v^{(0)}$, resp. $i^{(0)}$, víme, že platí

$$v^{(0)} = e^{-\sqrt{\alpha p}}$$

$$i^{(0)} = \sqrt{\frac{C}{R}} \sqrt{p}\, e^{-\sqrt{\alpha p}}.$$

Použijeme-li věty o posouvání, platí

$$\left.\begin{aligned} v^{(0)} e^{-\lambda t} &= \frac{p}{p + \lambda} e^{-\sqrt{\alpha p + \beta}} \\ i^{(0)} e^{-\lambda t} &= \frac{p}{p + \lambda} \sqrt{\frac{C}{R}} \sqrt{p + \lambda}\, e^{-\sqrt{\alpha(p + \lambda)}}. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Lze zajisté psáti:

$$v = \frac{p + \lambda}{p} \frac{p}{p + \lambda} e^{-\sqrt{\alpha p + \beta}} = \left(1 + \frac{\lambda}{p}\right) \frac{p}{p + \lambda} e^{-\sqrt{\alpha p + \beta}} \tag{91}$$

$$i = \frac{p + \lambda}{p} \frac{p}{p + \lambda} \sqrt{\frac{C}{R}} \sqrt{p + \lambda} \,.\, e^{-\sqrt{\alpha p + \beta}}$$

$$i = \left(1 + \frac{\lambda}{p}\right) \frac{p}{p + \lambda} \sqrt{\frac{C}{R}} \sqrt{p + \lambda} \,.\, e^{-\sqrt{\alpha p + \beta}}. \tag{92}$$

Nahradíme-li $1/p$ symbolem $\int dt$, plyne srovnáním (91) a (92) s rovnicemi (90)

$$v = \left(1 + \lambda \int_0^t dt\right) v^{(0)} e^{-\lambda t}$$

$$= (1 + \lambda \int_0^t dt)\, i^{(0)} e^{-\lambda t},$$

při čemž

$$v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{4t/a} \frac{e^{-1/\tau}}{\tau\sqrt{\tau}}\, d\tau$$

$$i^{(0)} = \sqrt{\frac{C}{\pi R t}}\, e^{-a/4t}. \tag{93}$$

Vliv svodu jeví se v tom, že vlna napětí i vlna proudová je tlumena (faktor $e^{-\lambda t}$) a že přistupuje další vlna, jež je úměrná svodu.

22. Homogenní vedení s rozděleným odporem, samoindukcí a kapacitou, ale bez svodu.

V tomto případě, ježto $G = 0$, zjednoduší se rovnice (71) a (72) na tvar:

$$\left(R + L\frac{\partial}{\partial t}\right) i = -\frac{\partial}{\partial x} v$$

$$C\frac{\partial}{\partial t} v = -\frac{\partial}{\partial x} i. \tag{94}$$

Provedeme-li známou náhradu ($\partial/\partial t \ldots p$),

$$(Lp + R)\, i = -\frac{d}{dx} v$$

$$Cpv = -\frac{d}{dx} i. \tag{95}$$

Rovnice (95) dostaneme z rovnic (75), píšeme-li v (75) $R + Lp$ místo R. Jedná-li se o vedení nekonečně dlouhé, je proud na začátku určen operátorovou rovnicí

$$i = v_0 \sqrt{\frac{Cp}{Lp + R}}.$$

Specialisujeme-li opět napětí v_0 vložené na počátek vedení na jednotkové napětí, plyne

$$i = \sqrt{\frac{Cp}{Lp + R}}. \tag{96}$$

Zavedeme-li zkratky $Z = L/C$ a $T' = 2L/R$, plyne, že

$$i = \frac{1}{Z\sqrt{1 + \dfrac{2}{pT'}}}.$$

Příslušná integrální rovnice zní:

$$\frac{1}{Z\sqrt{p^2 + \dfrac{2p}{T'}}} = \int_0^\infty e^{-pt}\, i(t)\, dt. \tag{96'}$$

Srovnáním s tabulkou integrálů 8 plyne, že

$$i(t) = \frac{1}{Z} e^{-t/T'} J_0\left(j\frac{t}{T'}\right), \tag{97}$$

kdež $J_0(j\,t/T)$ je Besselova funkce prvého řádu s ryze imaginárním argumentem. Heaviside rozvinul operátorovou rovnici (96) podle binomické věty:

$$i = \frac{1}{Z}\left\{1 - \frac{1}{pT'} + \frac{1\,.\,3}{2!}\left(\frac{1}{pT'}\right)^2 - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{3!}\left(\frac{1}{pT'}\right)^3 + \ldots\right\}. \tag{98}$$

Provedeme-li nyní známou náhradu $(1/p^n \ldots t^n/n!)$, obdržíme:

$$i = \frac{1}{Z}\left\{1 - \frac{t}{T'} + \frac{1\,.\,3}{(2!)^2}\left(\frac{t}{T'}\right)^2 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{(3!)^2}\left(\frac{t}{T'}\right)^3 + \ldots\right\}. \tag{99}$$

Pro velké hodnoty t lze tento konvergentní rozvoj jen obtížně vyčísliti. Proto podává Heaviside ještě jiný rozvoj; rovnici (96) lze přepsati:

$$i = \frac{1}{Z\sqrt{1 + 2/pT'}} = \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{pT'}{pT' + 2}} = \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{pT'}{2(1 + \frac{1}{2}pT')}}.$$

Rozvineme-li podle binomické poučky:

$$i = \frac{1}{Z}\left(1 - \frac{pT'}{4} + \frac{1\,.\,3}{2!}\left(\frac{pT'}{4}\right)^2 - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{3!}\left(\frac{pT'}{4}\right)^3 + \ldots\right)\sqrt{\frac{pT'}{2}}. \tag{100}$$

Ve vzorci (100) nahraďme $\sqrt{p}$ výrazem $1/\sqrt{\pi t}$ a p^n symbolem d^n/dt^n; dostaneme:

$$i = \frac{1}{Z}\left(1 - \frac{T'}{4}\frac{d}{dt} + \frac{1\,.\,3}{2!}\left(\frac{T'}{4}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2} - \frac{1\,.\,3\,.5}{3!}\left(\frac{T'}{4}\right)^3 \frac{d^3}{dt^3} + \ldots\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t/T'}}$$

čili

$$i = \frac{1}{Z\sqrt{2\pi t/T'}}\left(1 + \frac{T'}{8t} + \frac{(1\,.\,3)^2}{2!}\left(\frac{T'}{8t}\right)^2 + \frac{(1\,.\,3\,.\,5)^2}{3!}\left(\frac{T'}{8t}\right)^3 + \ldots\right). \tag{101}$$

Heaviside poznal, že divergentní řada na pravé straně je asymptotický rozvoj $e^{-t/T'} J_0(jt/T')$; dostal tedy shodně s námi:

$$i(t) = \frac{e^{-t/T'}}{Z} J_0\left(\frac{jt}{T'}\right).$$

VII. Asymptotické řešení operátorových rovnic. — Závěr.

23. Na konci předchozího odstavce setkali jsme se s tímto způsobem řešení. Rozsah tohoto pojednání by neobyčejně vzrostl, kdybych také o něm se měl podrobně zmíniti. Heaviside podává tento návod:

Lze-li pravou stranu operátorové rovnice

$$h = \frac{1}{H(p)}$$

rozvinouti v řadu

$$h = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n + \ldots$$
$$+ (b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_n p^n + \ldots)\sqrt{p},$$

nalezneme řešení, jež je obecně divergentní, jestliže prvou řadu škrtneme s výjimkou prvého členu a_0, v druhé řadě dosadíme $\sqrt{1/\pi t}$ za $\sqrt{p}$ a d^n/dt^n za p^n. Zní tedy explicite řešení takto:

$$h = a_0 + \left(b_0 + b_1 \frac{d}{dt} + b_2 \frac{d^2}{dt^2} + b_3 \frac{d^3}{dt^3} + \ldots\right) \frac{1}{\sqrt{\pi t}} =$$

$$= a_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left(b_0 - b_1 \frac{1}{2t} + b_2 \frac{1 \,.\, 3}{(2t)^2} - b_3 \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{(2t)^3} - \ldots\right)$$

Alespoň toto pokládám za nutné uvésti, aby oprávněnost substituce na konci předchozího odstavce jen poněkud byla objasněna.

V citované knize Carsonově je proveden podrobný důkaz této věty pro operátorové rovnice tvaru

$$h = F(p)\sqrt{p} \quad \text{a}$$
$$h = \Phi(p^k \sqrt{p}).$$

Rovněž i k některým jiným speciálním případům je tam přihlíženo.

24. Závěr. Úkolem tohoto pojednání bylo objasniti základy symbolické Heavisidovy metody. Proto je věnováno hlavně oběma základním metodám řešení rozvojem v řadu a rozkladem v parciální zlomky. Kromě toho je pojednáno o základních větách matematických, kterých při počítání touto metodou používáme. Aby bylo patrno, jak v praxi při řešení postupujeme, je připojeno několik příkladů. Konečně pak poukázáno stručně na některé speciální tvary operátorové rovnice, jichž řešení provedeno v citované literatuře.

II. oddělení fysikálního ústavu Karlovy university v Praze II., U Karlova 5.