Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

Jacobiova věta o křivočarých trojúhelnících v prostoru

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 2, 145--154

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121411

Jacobiova věta o křivočarých trojúhelnících v prostoru.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

1. Na dané konvexní ploše sestrojme křivočarý trojúhelník o úhlech α, β, γ, jehož strany jsou geodetickými čarami plochy; středem pomocné koule o poloměru rovném *1* veďme poloměry rovnoběžné s normálami plochy sestrojenými v jednotlivých bodech na obvodě trojúhelníka $\alpha\beta\gamma$. Tak obdržíme na povrchu koule nový trojúhelník $\alpha_1\beta_1\gamma_1$.

Dle *Gausse* jest obsah sférického obrazce $\alpha_1\beta_1\gamma_1$

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \tag{1}$$

Poněvadž normály plochy splývají v bodech obvodu $\alpha\beta\gamma$ s hlavními normálami oblouků $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, jest $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ sférický obraz hlavních normál těchto tří oblouků.

Jacobi[1]) shledal, že *rovnice* (1) *platí vůbec pro sférický obraz* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *hlavních normál křivočarého trojúhelníka o úhlech* α, β, γ, *jestliže oba oblouky stýkající se v kterémkoli z jeho vrcholů mají tam společný směr hlavní normály.* (Věta I.)

Vycházeje z této věty odvozuje *Jacobi* geometrickými úvahami následující vlastnost prostorových křivek, ve které nalézá „pravý původ“ věty I.:

Nekonečně malý úhel, který svírají dvě soumezné rektifikační přímky, rovná se přírůstku úhlu Θ *sevřeného binormalou a rektifikační přímkou.* (Věta II.)

---

[1]) *C. G. J. Jacobi*: Demonstratio et amplificatio nova theorematis Gaussiani de curvatura integra trianguli in data superficie e lineis brevissimis formati. (Journal für die r. u. angew. Math. Bd. 16. p. 344—350; 1837 nebo Ges. Werke Bd. VII.)

Jacobi nezavádí do svých úvah rektifikační přímky, nýbrž rovinu ϱ rovnoběžnou k dvěma soumezným hlavním normálám. Úhel této roviny a roviny oskulační rovná se úhlu Θ, neboť rektifikační přímka jakožto průsek dvou soumezných rektifikačních rovin stojí na rovině ϱ kolmo.

V pojednání výše citovaném jest dokázána věta II. geometricky i analyticky; v pojednání pozdějším [2]) nalézáme nový její geometrický důkaz i t. zv. věty *Craigovy* (viz odst. 5.). — Cílem tohoto článku jest zjednodušiti analytický důkaz *Jacobiův* užitím označení v differenciální geometrii křivek dnes obvyklého a odvoditi z věty II. přesnější formulaci věty I.

2. Budiž s délka oblouku prostorové křivky, R její poloměr křivosti a T poloměr torse; cosinusy úhlů, které svírají tečna, hlavní normála a binormála s osami souřadnými, označíme takto:

	Ox	Oy	Oz
tečna	a	a'	a''
hlav. normála	b	b'	b''
binormála	c	c'	c''

(2)

Determinant 3. řádu, jehož elementy jsou cosinusy, jest orthogonální a roven $+1$; každý jeho element rovná se příslušnému minoru. Platí známé rovnice

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,\ ac + a'c' + a''c'' = 0,\ a'b'' - a''b' = c \tag{3}$$

atd.

Tři cosinusy v každém sloupci schematu (2) vyhovují differenciálním rovnicím (formule Frenetovy)

$$\frac{da}{ds} = \frac{b}{R},\quad \frac{db}{ds} = -\frac{a}{R} - \frac{c}{T},\quad \frac{dc}{ds} = \frac{b}{T}. \tag{4}$$

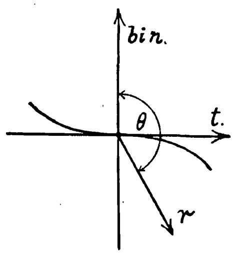
Rektifikační rovina bodu (x, y, z)

$$b\,(X - x) + b'\,(Y - y) + b''\,(Z - z) = 0 \tag{5}$$

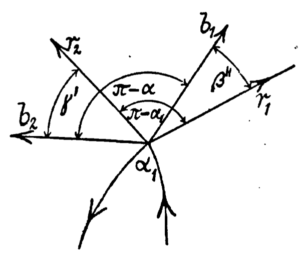
---

[2]) *Jacobi*: Über einige merkwürdige Curventheoreme (Astron. Nachrichten Bd. 20. p. 115—120; 1842 nebo Ges. Werke Bd. VII).

protíná soumeznou rektifikační rovinu v přímce rektifikační r, která prochází bodem (xyz). Její poloha jest určena úhlem Θ, jejž svírá s binormálou. Úhel Θ čítám kladně od binormály k tečně $(0 \leqq \Theta < \pi)$; tím jest ustanoven i kladný směr přímky r. Cosinusy jeho nazveme λ, μ, ν. V obr. 1. jsou naznačeny průmět



Obr. 1.



Obr. 2.

křivky do rektifikační roviny a kladné směry binormály, tečny a přímky r pro $T > 0$. Z rovnice (5) vypočteme

$$\lambda = a \sin \Theta + c \cos \Theta$$
$$\mu = a' \sin \Theta + c' \cos \Theta$$
$$\nu = a'' \sin \Theta + c'' \cos \Theta;$$

$$\sin \Theta = + \frac{R}{\sqrt{R^2 + T^2}}, \quad \cos \Theta = - \frac{T}{\sqrt{R^2 + T^2}}. \tag{6}$$

Derivujme rovnice pro λ, μ, ν dle s a dosaďme za $\frac{da}{ds}, \frac{dc}{ds}, \ldots$ příslušné hodnoty z (4). Poněvadž jest

$$\frac{\sin \Theta}{R} + \frac{\cos \Theta}{T} = 0,$$

vychází

$$\frac{d\lambda}{ds} = (a \cos \Theta - c \sin \Theta) \frac{d\Theta}{ds}$$

a podobné dvě rovnice pro $\frac{d\mu}{ds}$ a $\frac{d\nu}{ds}$. Sečtením čtverců obdržíme

$$d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = d\Theta^2.$$

Tím jest věta II. dokázána, neboť levá strana v této rovnici rovná se čtverci nekonečně malého oblouku na sférickém obraze rektifikačních přímek, t. j. čtverci úhlu, který svírají dvě soumezné přímky rektifikační. Z rovnic (6) vypočteme derivováním

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{R\frac{dT}{ds} - T\frac{dR}{ds}}{R^2 + T^2}. \tag{7}$$

3. Přistupme nyní k důkazu věty I., který obdržíme obrácením postupu *Jacobiova* (srv. odst. 1.).

Na obvodě daného křivočarého trojúhelníka $\alpha\beta\gamma$ volíme směr od α přes β ku γ za kladný; tím jest ustanoven jednak kladný směr binormál a rektifikačních přímek a tedy i hodnota úhlu Θ v každém bodě obvodu, jednak určitý směr na sférickém obraze hlavních normál $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Hodnoty úhlu Θ ve vrcholech $\alpha\beta\gamma$ označíme takto:

na oblouku	v bodě	Θ
$\alpha\beta$	α	γ'
$\alpha\beta$	β	γ''
$\beta\gamma$	β	α'
$\beta\gamma$	γ	α''
$\gamma\alpha$	γ	β'
$\gamma\alpha$	α	β''

(8)

Oblouky $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ nesmí obsahovati body singulární; stacionární oskulační roviny nejsou vyloučeny.

O sférickém obrazu $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ hlavních normál předpokládám, že

1. omezuje konvexní obrazec o plošném obsahu P, a

2. při oběhu od α_1 přes β_1 ku γ_1 leží vnitřek tohoto obrazce po levé straně pro pozorovatele, který se nalézá vně koule.

Tyto předpoklady vyžadují (viz odůvodnění v odst. 4.), aby podél celého obvodu $\alpha\beta\gamma$ platila nerovnost

$$R\frac{dT}{ds} - T\frac{dR}{ds} < 0 \tag{9}$$

aneb, srovnáme-li se vzorcem (7):

$$\frac{d\Theta}{ds} < 0. \tag{9a}$$

Plocha P jest určena známým vztahem

$$P = 2\pi - l, \tag{10}$$

kde l značí obvod čáry polární ku $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Čára l má šest částí:

1.) 3 oblouky hlavních kružnic o délkách $(\pi - \alpha_1)$, $(\pi - \beta_1)$, $(\pi - \gamma_1)$, které odpovídají úhlům α_1, β_1, γ_1;

2.) 3 oblouky l_1, l_2, l_3 polární k obloukům $\beta_1\gamma_1$, $\gamma_1\alpha_1$, $\beta_1\ \alpha_1$ (oblouky l_i jsou sférickými obrazy rektifikačních přímek pro oblouky $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$).

Všechny tyto části jsou veličiny kladné. Rozdíly $(\pi - \alpha_1)$ atd. jsou jistě kladné, poněvadž P jest konvexní. Differenciály oblouků l_i jsou dle věty II. co do absolutní hodnoty rovny příslušným differenciálům úhlu Θ. Poněvadž však Θ s rostoucím s se zmenšuje — viz (9a) — bude

$$l_1 = \int_{s(\beta)}^{s(\gamma)} -\frac{d\Theta}{ds} \,.\, ds = \alpha' - \alpha''$$

a podobně, užijeme-li označení tab. (8),

$$l_2 = \beta' - \beta'', \quad l_3 = \gamma' - \gamma''.$$

V obr. 2., jehož rovina dotýká se pomocné koule v bodě α_1. jsou naznačeny 1.) části oblouků $\gamma_1\alpha_1$, $\alpha_1\beta_1$; 2.) kolmice r_1, r_2 k těmto obloukům v bodě α_1 sestrojené, jež jsou rovnoběžné s rektifikačními přímkami oblouků $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ v bodě α; 3.) přímky b_1, b_2 rovnoběžné s binormálami posledních oblouků v bodě α. Úhel $\widehat{b_1 b_2}$ vyplňuje se s úhlem α na 180^0. Z obrazce poznáme — srv. s označením (8) — že

$$\pi - \alpha_1 + \gamma' = \pi - \alpha + \beta''.$$

Připojíme-li další dvě rovnice pro vrcholy β_1 a γ_1, obdržíme tři rovnice

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha + \gamma' - \beta'' \\ \beta_1 &= \beta + \alpha' - \gamma'' \\ \gamma_1 &= \gamma + \beta' - \alpha'', \end{aligned}$$

kterými lze eliminovati α_1, β_1, γ_1 z rovnice

$$P = 2\pi - (\pi - \alpha_1 + \pi - \beta_1 + \pi - \gamma_1 + l_1 + l_2 + l_3)$$
$$= \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \alpha' + \alpha'' - \beta' + \beta'' - \gamma' + \gamma'' - \pi.$$

Výsledek eliminace vede k hledané rovnici

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \qquad (1)$$

4. Důkaz věty I. právě uvedený jest třeba doplniti odůvodněním nerovnosti (9). Za tím účelem sestrojíme rovinu σ největší kružnice (na pomocné kouli), která se v bodě $M(b, b', b'')$ dotýká sférického obrazu hlavních normál. Bod M — viz označení v odst. 2. — odpovídá jisté hodnotě s; bod N sférického obrazu o souřadnicích

$$\begin{aligned} &b + \frac{db}{ds}\,.\,ds + \frac{1}{2}\frac{d^2b}{ds^2}\,.\,ds^2 + \ldots, \\ &b' + \frac{db'}{ds}\,.\,ds + \frac{1}{2}\frac{d^2b'}{ds^2}\,.\,ds^2 + \ldots, \qquad (11) \\ &b'' + \frac{db''}{ds}\,.\,ds + \frac{1}{2}\frac{d^2b''}{ds^2}\,.\,ds^2 + \ldots, \end{aligned}$$

odpovídá hodnotě $(s + ds)$. Střed koule (počátek souřadnic) budiž S; směr kolmice SS' k rovině σ určíme tak, aby tři přímky: SM, SN a SS' měly obdobnou vzájemnou polohu jako osy x, y, z. Poněvadž pro $\lim ds = 0$ jest

$$SS' \perp SM, \quad SS' \perp SN,$$

platí pro cosinusy p, q, r směru SS' známá úměra

$$p : q : r = \begin{vmatrix} b' & b'' \\ \frac{db'}{ds} & \frac{db''}{ds} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b'' & b \\ \frac{db''}{ds} & \frac{db}{ds} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b & b' \\ \frac{db}{ds} & \frac{db'}{ds} \end{vmatrix}; \qquad (12)$$

každý determinant na pravo má totéž znamení jako stejnolehlý člen na levo.

Rovina σ má rovnici

$$p\,(X - b) + q\,(Y - b') + r\,(Z - b'') = 0; \qquad (13)$$

její positivní strana jest ta, ze které vystupuje SS'. Vypočtěme vzdálenost D bodu N od této roviny: do levé strany (13) dosadíme za X, Y, Z souřadnice (11) bodu N, a ve výsledku substituce vynecháme nekonečně malé veličiny řádu třetího a vyšších. Poněvadž

$$b\frac{db}{ds}+b'\frac{db'}{ds}+b''\frac{db''}{ds}=0,$$

vychází

$$D=\frac{1}{2}\left(p\frac{d^2b}{ds^2}+q\frac{d^2b'}{ds^2}+r\frac{d^2b''}{ds^2}\right)ds^2.$$

Abychom určili znamení D, zaveďme na místo p, q, r úměrné determinanty (12) a vylučme pak derivace $\frac{db}{ds}, \frac{d^2b}{ds^2}\,..$ užívajíce vztahů (4) a (3); tak obdržíme po snadné redukci výraz

$$\frac{1}{2}\frac{ds^2}{R^2T^2}\left(R\frac{dT}{ds}-T\frac{dR}{ds}\right),$$

jenž má totéž znamení jako D.

Při oběhu od M ku N zůstává (v blízkosti bodu M) sférická křivka pro pozorovatele vně koule se nalézajícího na levo, t. j. na negativní straně roviny σ, je-li $D<0$. Nalézáme tedy skutečně podmínku (9) dříve uvedenou jako důsledek předpokladů, které byly učiněny o sférické křivce $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ v odst. 3.

Nerovnost (9) nebo (9a) platí dle odvození jen pro regulární oblouky křivky; nemůžeme z ní usuzovati, že jest $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ konvexní i v rozích $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

5. Vyhovuje-li sférický obraz $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ zmíněným předpokladům, jest správnost věty I. nepochybná. Avšak tato věta platí také v jiných případech, kdy ty předpoklady nejsou splněny, Zajímavý příklad poskytuje následující věta, kterou *Hoppe*[3]) připisuje *Craigovi*, kterou však již dříve dokázal *Jacobi*[2]):

Sférický obraz Γ' hlavních normál uzavřené prostorové křivky Γ dělí pomocnou kulovou plochu na dvě části stejného obsahu.

Předpokládá se ovšem, že směr hlavní normály Γ se spojitě mění a že Γ nemá dvojného bodu.

[3]) *R. Hoppe*: Bemerkung zu einem Satze von Craig (Archiv d. Math. u. Physik. 2te Reihe. 2. Theil. p. 103—106; 1885). Srv. též *H. Laurent*: Traité d'Analyse t. VII. p. 73.; 1891.

Tato věta jest specielním případem věty I. pro

$$\alpha = \beta = \gamma = \pi$$

$$\gamma' - \beta'' = \alpha' - \gamma'' = \beta' - \alpha'' = 0.$$

Předem můžeme ukázati, že křivka Γ nemůže býti nikdy konvexní (vyjímaje případ, kdy by se redukovala na hlavní kružnici pomocné koule). Levá strana nerovnosti (9) má totiž stejné znamení s výrazem, který obdržíme derivací podílu

$$T : R$$

dle s. Tento podíl jest periodickou funkcí s (perioda = délce čáry Γ); musí tudíž míti aspoň jedno maximum a jedno minimum, t. j. jeho derivace a s ní zároveň levá strana nerovnosti (9) nebo (9a) mění znamení. Na křivce Γ střídají se části konvexní s konkávními; jedny od druhých jsou odděleny „sférickými inflexemi“, totiž body, ve kterých má hlavní kružnice koule s čarou Γ dotyk 2. stupně.

V těch bodech mění — viz (7) — veličina $d\Theta$ znamení. Pro konkávní části obvodu Γ' vycházejí příslušné části obvodu l, jenž se vyskytuje v rovnici (10), negativně. To souhlasí s okolností, že (10) platí pro libovolné uzavřené obrazce; l jest součet vnějších úhlů, jedná-li se o obyčejný sférický polygon; obecně jest l integrál kontingenčního úhlu, jenž je měřen podél obvodu obrazce. Vnější úhel (resp. differenciál kontingenčního úhlu) jest čítati kladně pro konvexní části obvodu, záporně pro konkavní.

Věta na počátku tohoto odstavce vyslovená jest tedy správná, ač nerovnost (8) nemůže býti splněna ve všech bodech uzavřené čáry prostorové.

6. Ku konci uvádím jednoduchý příklad křivočarého trojúhelníka, pro který *Jacobiova* věta I. neplatí. Vrcholy trojúhelníka α, β, γ mají souřadnice

$$\alpha\,(0, 1, 0),\ \beta\,(-1, 0, k),\ \gamma\,(k, 0, 1).$$

Jeho stranami jsou:

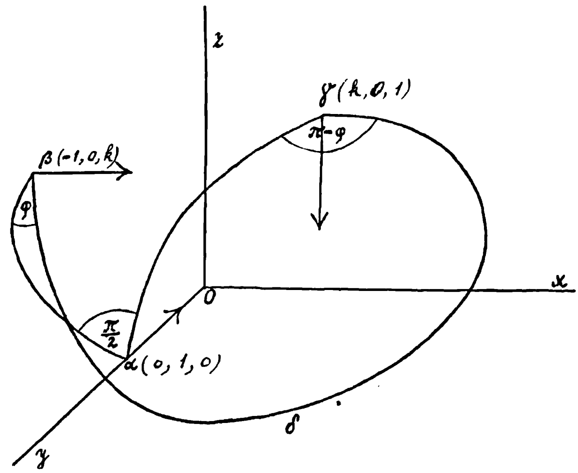
1. $\alpha\beta$ . . . čtvrtina závitu závitnice na rotačním válci

$$x^2 + y^2 = 1;$$

výška čtvrtiny závitu jest k, torse jest záporná.

2. $\alpha\gamma$... oblouk, jenž vzniká z předešlého rotací o 90^0 kolem společné hlavní normály obou oblouků v α.

3. $\beta\delta\gamma$... oblouk rovinné křivky bez inflexního bodu, která leží v rovině xz; její normály v bodech β a γ koincidují s hlavními normálami oblouků $\beta\alpha$, resp. $\gamma\alpha$.



Obr. 3.

Na obr. 3. jsou šipkami naznačeny směry hlavních normál ve vrcholech α, β, γ.

Úhly trojúhelníka $\alpha\beta\gamma$ jsou patrně

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \varphi, \quad \gamma = \pi - \varphi,$$

značí-li φ ostrý úhel, v němž závitnice protíná hrany válce. Sférickým obrazem hlavních normál jsou dva kvadranty $\gamma_1\alpha_1$, $\alpha_1\beta_1$ pomocné koule a oblouk hlavní kružnice $\beta_1\gamma_1$, jenž obnáší 3 kvadranty. Povrch koule jest tedy rozdělen na dvě části (z nichž ani jedna není konvexní) o plochách

$$P_1 = \frac{3\pi}{2}, \quad P_2 = \frac{5\pi}{2}.$$

Naproti tomu jest

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Rovnici (1) lze však vyhověti, jestliže na pravé straně za α volíme vypuklý úhel $\frac{3\pi}{2}$ místo $\frac{\pi}{2}$; pravá strana rovná se pak ploše P_1.

Jak soudil H. Poincaré o vztazích mathematiky k logice.*)

Napsal dr. K. Vorovka.

Chceme-li nabýti přehledu v té veliké rozmanitosti myšlenek, které Poincaré ve svých polemikách často jen nadhodil, učiníme snad nejlépe, seskupíme-li látku kol několika hesel:

Intuice co extralogický princip mathematického poznání.

Mnozí logikové učí, že mathematika co věda jest povahy výlučně deduktivní; že každý postup, kterým mathematika z pravd již poznaných vyvíjí pravdy nové, jest jen přechod od obecného ku zvláštnímu, a že tedy každá nová poučka, kterou chceme dokázati, jest vlastně již v základních definicích obsažena. Kdyby tomu tak skutečně bylo, pak by celá mathematika nebyla než jedinou ohromnou tautologií. Každý mathematický theorém dal by se proměniti v logickou indentitu $a \equiv a$. K tomu stačilo by pouze místo všech používaných vědeckých názvů dosaditi jejich smysl vyjádřený základními definicemi.

S tímto názorem Poincaré nesouhlasil. Vždyť na př. co chvíli čteme práce jednající o zobecnění té neb oné poučky, a to jest patrně krok od zvláštního k obecnému. Získává-li tedy mathematika nové pravdy — které nejsou pouhými tautologiemi —, musí tato věda míti nějaké prostředky *extralogické, na logické principy*

---

*) Rozšířený výňatek z přednášky »H. Poincaré co filosof«, konané v J. Č. M. a F. v lednu 1913.