František Kadeřávek

O isofengách ploch osvětlených geometrálně neb středově a zobrazených v průmětech rovnoběžných nebo centrálných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 2, 169--181

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121410

Vzorec tento jest řešením problemu, protože vyjadřuje k-tý co do absolutní velikosti kořen algebraické rovnice (1) jako limitu výrazu sestrojeného z *obecných* koeficientů rovnice (1).

O isofengách ploch osvětlených geometrálně neb středově a zobrazených v průmětech rovnoběžných nebo centrálných.

Dr. Fr. Kadeřávek.

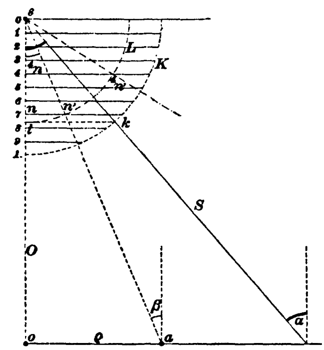
Úkolem tohoto článku jest vyšetření křivek stejné zdánlivé světlosti, či t. zv. isofeng na plochách pro možné kombinace osvětlení rovnoběžného neb středového s promítáním parallelním neb centrálním. Řídíce se spisy staršími, chceme řešení úkolu provésti v předpokladu, že zdánlivá světlost prvku plošného jest přímo úměrna cosinu úhlu sevřeného normálou prvku a paprskem zorným, rovněž přímo úměrna cosinu úhlu dopadu paprsku světelného a v případě osvětlení středového nepřímo úměrna se čtvercem vzdálenosti prvku pozorovaného od svítícího bodu.

Při osvětlení *roviny* nastávají čtyři případy a to:

1. Rovina ϱ jest osvětlena paprsky rovnoběžnými a zobrazena v promítání rovnoběžném. Zdánlivá světlost roviny jest v celém rozsahu průmětu táž, rovná $\iota^{\varrho} = \iota^{1} \cos \alpha \cos \beta$, kdež α a β jsou úhly sevřené světelným a zorným paprskem s normálou roviny ϱ, ι^{1} jest jedničkou světlosti; volíme za ni *skutečnou* světlost roviny kolmo paprsky světelnými osvětlované.

2. Rovina ϱ buď osvětlena rovnoběžně paprsky S a promítnuta ze středu s. Spusťme s bodu s kolmici O na rovinu ϱ, patu její označme o, dále veďme bodem s paprsek S a rovinu (OS) zvolme za pomocnou průmětnu (obr. 1.). Opišme kol bodu S poloměrem $\overline{s1}$. rovným zvolené jedničce kružnici K; délku $\overline{s1}$. rozdělme na 10 stejných dílů a v dělících bodech vztyčme kolmice k ose O. Ježto paprsky S dopadají na rovinu ϱ pod úhlem α, jest skutečná světlost roviny ϱ úměrna $\cos \alpha$, jejž snadno spuštěním kolmice $\overline{kl}$ s průsečíku k paprsku S s kruž-

nicí K na osu O změříme v úsečce $\overline{sl}$ na měřítku $\overline{s1}$. Opišme poloměrem $\overline{sl} = \cos\alpha$ kol s kružnici L a jejími průsečíky s přímkami kolmo k O dělícími body jedničky $\overline{s1}$. vedenými proložme paprsky svazku o středu s. V obr. 1. vyznačen paprsek $\overline{sn'}$ protínající rovinu ϱ v bodě a při úhlu do-

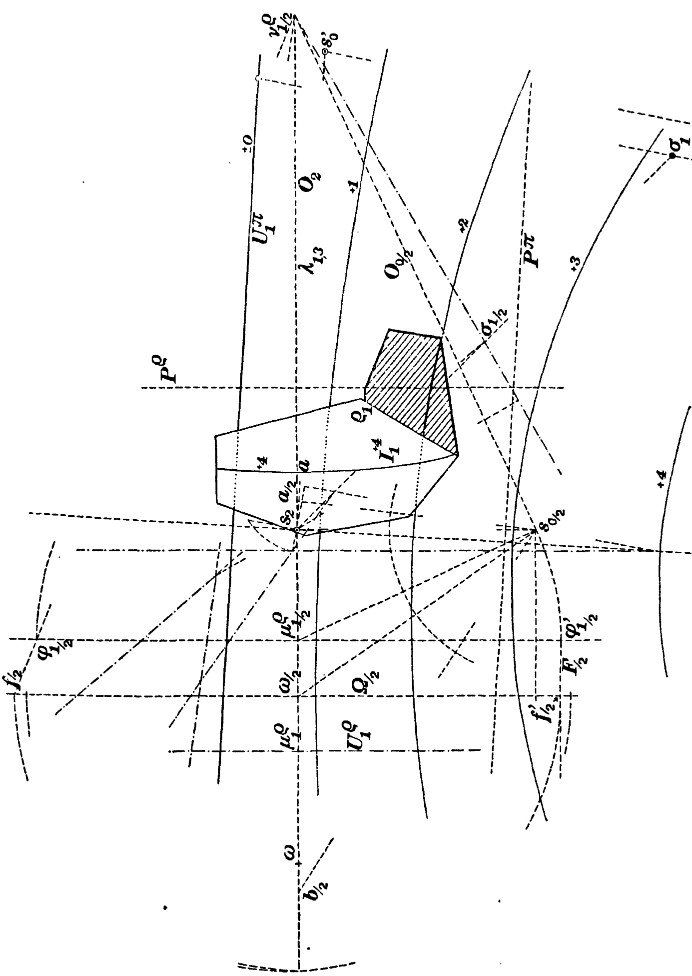


Obr. 1.

padovém β. Zdánlivá světlost ι_a bodu a pozorovaného ze středu s jest $\iota_a = \iota^1 \cos\beta \cos\alpha = \iota^1 \frac{\overline{ns}}{\overline{n's}} \cdot \overline{sl}$; ježto však $\overline{n's} = \overline{sl}$, jest $\iota_a = \iota^1 \overline{ns} = 0{\cdot}7\,\iota^1$, kdež ι^1 jest jednička světlosti táž jako v předcházejícím odstavci. Veškery body roviny ϱ, mající od bodu o, jemuž, jak patrno z maximální hodnoty $\cos\beta = 1$, přísluší největší zdánlivá světlost, touž vzdálenost, mají touž zdánlivou intensitu. Jsou tedy isofengy roviny v tomto zvlaštním případě kružnice soustředné; jejich průměty však jsou kuželosečky, vyjímaje případ, kdy rovina ϱ je rovnoběžná s průmětnou.

V obr. 2. určeno promítání centrálné středem s_2 průmětny, distancí $\overline{s_2 s'_0} = d$; dále určena stopou P^ϱ a úběžnicí U_1^ϱ rovina ϱ; σ_1 jest úběžník světelných paprsků. Isofengy roviny ϱ jsou kružnice opsané kol paty o kolmice O ze středu s na rovinu ϱ spuštěné. Jest patrno, že centrálný průmět o_1 bodu o spadá s úběžníkem ν_1^ϱ kolmic k rovině ϱ. (V obraze 2. vzhledem k značné distanci důležité z meze nákresny vypadlé body přiblíženy na polovici vzdálenosti k bodu s_2 a označeny znakem $/_2$.)

Stanovme si vzdálenost δ bodu s od roviny ϱ a úhel α paprsku S s normálou O, načež sestrojme si obraz pomocný (obr. 1). Bodem



Obr. 2.

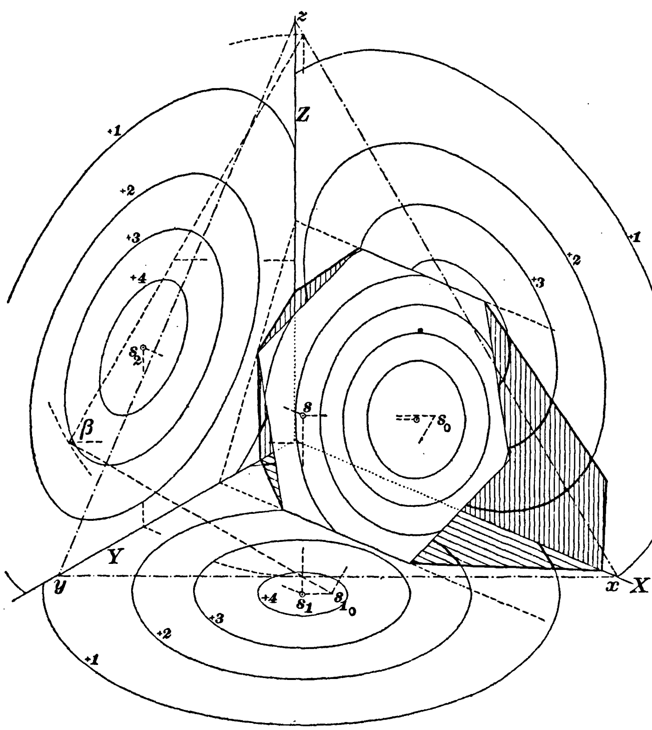
s veďme paprsek S a přímku O s ním úhel α svírající, na níž učiňme $\overline{so} = \delta$ a veďme bodem o přímku $\varrho_1 \perp O$. Kol s sestrojme poloměrem libovolným kružnici K, v níž veďme sečny rovnoběžné s ϱ_1 body 1, . . . 9, 1. dělícími poloměr $\overline{s1}$. na

10 stejných dílů. S průsečíku k paprsku S a kružnice K spusťme do bodu l na osu O kolmici a opišme kružnici L poloměrem $\overline{sl}$. Promítneme-li její průsečíky s osnovou zarýsovaných s ϱ_1 rovnoběžných sečen z bodu s, dostáváme svazek paprskový, který otočen kol osy O určuje kužele, protínající rovinu ϱ v kružnicích, jimž přísluší světlosti rovné celému počtu desetin intensity zdánlivé jedničkové. Tak na př. patrno, že $\overline{oa}$ jest poloměrem kružnicové isofengy světlosti $\iota = 0{\cdot}7\iota^1$. Znajíce takto poloměry a střed isofeng roviny ϱ můžeme je snadno v oklopení a i v průmětu zarýsovati (obr. 2.).

Možno však i při sestrojování následovně pokračovati: Abychom sestrojili průmět I_1^{+4} isofengy I^{+4} světlosti $\iota = +0{\cdot}4\,\iota^1$, vyšetřme si v pomocném obr. 1. vrcholový úhel $^4\beta = {^4n}s{^4n'}$ kužele rotačního, který isofengu I^{+4} z roviny ϱ vytíná. Proložme (obr. 2.) osou O rovinu λ kolmou k průmětně, oklopme ji kol stopy O_2 a sestrojme v oklopení bodem s_0 obě přímky $\overline{s_0a}$, $\overline{s_0b}$ s oklopenou osou O_0 úhel $^4\beta$ svírající; jejich průsečíky a, b s O_2 jsou vrcholy hlavní osy průmětu I_1^4; rozpůlením úsečky ab získáme střed ω a druhou osu Ω co do polohy můžeme stanoviti. Omezíme ji na základě toho, že úběžnice $U_1{}^\varrho$ a bod $o_1 = \nu_1{}^\varrho$ jsou polárou a polem centrálného obrazu I_1^4, na oné známe involuci harmonických polů, neboť kružnice I^{+4} prochází samodružnými body úběžné absolutní involuce, která se promítá na úběžnici $U_1{}^\varrho$ do involuce o středu $\mu_1{}^\varrho$; jednou dvojinou její jsou oba úběžníky φ_1, φ'_1 přímek se stopou P^ϱ úhel 45^0 svírajících $(\overline{\mu_1{}^\varrho \varphi_1} = \overline{\mu_1{}^\varrho \varphi'_1} = \overline{\mu_1{}^\varrho s_0})$. Vedeme-li bodem φ' rovnoběžku F s osou O_2 až k průsečíku f' s osou Ω, přísluší jí pol f', průsečík to osy Ω se spojnicí $\varphi_1\nu_1{}^\varrho$. Střední geom. úměrná úseček $\overline{\omega f'}$, $\overline{\omega f'}$ jest délkou poloosy v Ω položené. V obr. 2. vyřešeno vše v polovičním zmenšení vzhledem k bodu s_2, jakož i vyřešeny isofengy o světlostech rovných celému počtu desetin intensity jedničkové v další rovině π.

3. Mějme zobrazenu rovinu v promítání rovnoběžném, osvětlení však buď středové; vytkněme na př. v orthogonálném axonometrickém obraze 3., daném trojúhelníkem stopním xyz, rovinu $(XY) \equiv \pi$ a osvětleme ji s bodu s, daného obrazem axonometrickým s a půdorysem s_1. Rovině π příslušejí pro svítící bod s určité isofoty J; zorné paprsky dopadají však na

celou rovinu π pod týmž úhlem (v obr. 3. vyšetřen v úhlu β), bude proto podél určité isofoty J^{μ} roviny π, vyplněné body intensity $i^{\mu} = o\,\mu\,i^{1}$, zdánlivá světlost ι konstantní rovná $i^{\mu} \cos \beta$, z čehož patrno, že isofoty a isofengy roviny π v tomto případě jsou tytéž křivky. Konstrukci isofot při osvětlení středovém roz-

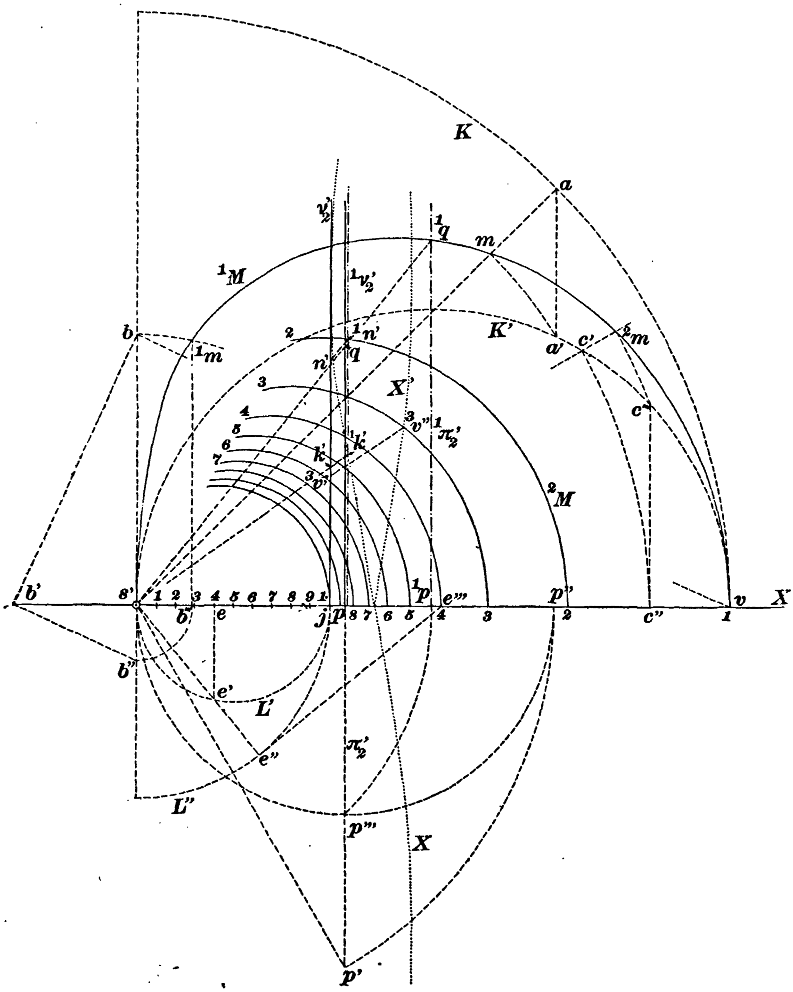


Obr. 3.

řešil dokonale již r. 1871 p. vládní rada Vincenc Jarolímek v článku „Centrálné osvětlení. Problem z oboru deskriptivní geometrie", výroční zprávy soukromného reálného gymnasia Dra. J. Maade, v němž sestrojuje isofoty roviny stupnicí křivek, kterou dvor. rada prof. B. Procházka Jarolímkovou stupnicí rovin rovnoběžných nazývá[1]). Název tento v článku podržíme.

[1]) B. Procházka: Vybrané statě z deskriptivní geometrie. Česká Matice technická, spis 64 (1913) str. 37.

K stupnici Jarolímkově dojdeme následní cestou: V nárysně mysleme si svítící bod s' (obr. 4.) v ose souřadné X, jejímž libovolným bodem p $(\overline{s'p} = x)$ veďme rovinu $\pi' \perp X$, π'_2



Obr. 4.

jest její nárys, v němž zvolme si bod p'; jeho vzdálenost od bodu svítícího $\overline{s'p'}$ buď ϱ, úhel dopadu světelného paprsku $\overline{s'p'}$ na rovinu π' buď $\alpha = ps'p'$.

Přísluší tedy bodu p' intensita

$$i_{p'} = \frac{i^1 \cos\alpha}{\varrho^2},$$

ježto však

$$\cos\alpha = \frac{\overline{ps'}}{\varrho},$$

jest

$$i_{p'} = \frac{i^1\, \overline{ps'}}{\varrho^3}.$$

Otáčíme-li bod p' kol osy X, nemění se jeho intensita, z čehož patrno, že isofoty roviny π' jsou kružnice kol bodu p (paty kolmice s bodu s' na π' spuštěné) opsané. Suneme-li rovinu π' rovnoběžně, mění se v nárysně poloha bodu p', předpokládáme-li jeho intensitu konstatní, a probíhá křivku $M_{p'}$ o rovnici

$$M_{p'} \equiv i^1 \frac{\cos\alpha}{\varrho^2} = i_{p'} = konst \;. \;. \;. \qquad (1)$$

v souřadnicích polárných (α, ϱ), neb

$$M_{p'} \equiv i^1 \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = i_{p'} = konst \;. \;. \;. \qquad (2)$$

v souřadnicích pravoúhlých (x, y) o počátku v s'. Otočením křivky $M_{p'}$ kol osy X vznikne plocha, jež každou rovinu rovnoběžnou s π' seče v kružnici isofotní o intensitě $i_{p'}$. Jest patrno, že v ose X leží ony body rovin rovnoběžných s π', jimž příslušejí relativně největší intensity; pata pak kolmice spuštěné s bodu s' na rovinu, mající od s' vzdálenost rovnou jedné, má intensitu i^1. Mění-li se hodnota $i_{p'}$, mění se i křivka $M_{p'}$ a to dle středu s' podobně.

Sestrojme si v ose X body 1, 2 . . . 1., jimž příslušejí od bodu s' vzdálenosti rovné

$$\frac{1}{\sqrt{0{\cdot}1}},\ \frac{1}{\sqrt{0{\cdot}2}} \;. \;. \;. \qquad (1)$$

a veďme jimi roviny kolmé k X. Body sestrojené budou v těchto rovinách body maximálně osvětlené a příslušejí jim intensity rovné $0{\cdot}1 i^1$, $0{\cdot}2 i^1$ . . . i^1. Sestrojme nad úsečkami $\overline{s'1}$, $\overline{s'2}$, . . .

$\overline{s'1}$. křivky ^1M, ^2M . . . a otočme je kol osy X. Takto vzniklé rotační plochy vytínají v rovinách kolmých k X isofoty, jimž příslušejí světlosti rovné celému počtu desetin intensity jedničkové. Máme-li pak kdekoliv v prostoru bod s téže světelné mohutnosti jako bod s' a libovolnou rovinu π od s odlehlou o úsečku $\overline{ss_1}$, stačí, hledáme-li isofoty roviny π, sestrojiti rovinu $\pi' \perp X$ od s' o úsečku $\overline{s'p} = \overline{ss_1}$ odlehlou a vyšetřiti její průsečné křivky se zmíněnými rotačními plochami. Přenesením těchto kružnic do roviny π tak, by s_1 byl jejich středem, vyšetřili jsme isofoty roviny π.

Sestrojení jednotlivých křivek Jarolímkovy stupnice provedeme následně: Na ose X zvolme bod s' (obr. 4.) a od něho do bodu $j \equiv 1$. nanesme délku zvolené jedničky, jíž body $1'$, $2'$ . . . rozdělme na 10 rovných dílů. Opišme nad $\overline{s'j}$ kružnici L' a kružnici L'' poloměrem $\overline{s'j}$ kol bodu s'; vztyčíme-li pak na př. v bodě $4'$ kolmici $\overline{ee'}$ k ose x, vedeme-li jejím průsečíkem e s L' poloměr $\overline{s'e'e''}$ kružnice L'' a v jeho koncovém bodu e'' tečnu $\overline{e''e'''}$ kružnice L'' až k průsečíku e''' s osou X, tu jest poměr $\overline{s'e} : \overline{s'e'}$ roven $\overline{s'e''} : \overline{s'e'''}$, kdež $\overline{s'e''} = 1$; $\overline{s'e'} = \sqrt{\overline{s'j} \cdot \overline{s'e}}$ $= \sqrt{1.0{\cdot}4} = \sqrt{0{\cdot}4}$ i jest $\overline{s'e'''} = \dfrac{\overline{s'e'}}{\overline{s'e}} = \dfrac{\sqrt{0{\cdot}4}}{0{\cdot}4} = \dfrac{1}{\sqrt{0{\cdot}4}}$. Podobně jako bod $e''' \equiv 4$ vyhledáme i ostatní body 1, 2 . . . v ose X ve vzdálenosti $\dfrac{1}{\sqrt{0{\cdot}1}}, \dfrac{1}{\sqrt{0{\cdot}2}} \dots$

Abychom z délky $\overline{s'1} = \dfrac{1}{\sqrt{0{\cdot}1}}$ sestrojili příslušnou křivku ^1M, největší v stupnici Jarolímkově, můžeme pokračovati různým způsobem, uživše rovnic (1), (2), t. odst. Prof. Jarolímek op. cit., str. 17., provádí konstrukci následní: Bodem 1 vede libovolný paprsek (obr. 4) $\overline{1b}$, jeho průsečíkem b s přímkou $\overline{s'b} \perp X$ vede $\overline{bb'} \perp \overline{1b}$ a průsečíkem b' oné přímky s osou X přímku $\overline{b'b''} \perp \overline{bb'}$ až k bodu b'' přímky $\overline{s'b}$. Úsečku $\overline{b''s'}$ přenáší od bodu s' na osu X do bodu b''', jímž vedená kolmice k ose X protíná kružnici kol s' poloměrem $\overline{s'b}$ popsanou v bodě ^1m, který meridiánu ^1M náleží. Prof. Procházka[2]) užívá konstrukce:

[2]) Již stanovené Vybrané statě, stať VIII. (zpracovaná a doplněná habilitační práce prof. B. Procházky), str. 40.

Nad $\overline{s'1}$ (obr. 4.) opíše kružnici K', protne ji paprskem $\overline{s'c'}$ v bodě c', učiní $\overline{s'c'} = \overline{s'c''}$ v ose X, bodem c'' vede $\overline{c''c'''} \perp X$, až k průsečíku c''' s kružnicí K' a délku $\overline{s'c'''}$ přenese kružnicí kol s' popsanou na paprsek $\overline{s'c'}$ do bodu ^2m meridiánu ^1M. Opíšeme-li kol s' kružnici K poloměrem $\overline{s'1}$, lze též křivku ^1M sestrojiti takto: Veďme poloměr $s'a$ kružnice K, jeho koncovým bodem a spusťme $\overline{aa'} \perp X$, vyšetřme průsečík a' této kolmice s kružnicí K' a přenesme délku $\overline{s'a'}$ od bodu s' do m na poměr $\overline{s'a}$. Bod m je bodem křivky ^1M, neboť označíme-li úhel $vs'a$ písmenou α a úsečku $\overline{s'm}$ písmenou ϱ, jest

$$\overline{s'a'}^2 = \overline{s'v}\ .\ \overline{s'a}\cos\alpha = \overline{s'v}^2\cos\alpha,$$

kdež však $\overline{s'v} = \frac{1}{\sqrt{0\cdot 1}}$ i náleží bod m křivce o rovnici:

$$\varrho^2 = \frac{1}{0\cdot 1}\cos\alpha.$$

či

$$0\cdot 1 = \frac{\cos\alpha}{\varrho^2}$$

jež jest s rovnicí (1) t odstavce pro $i_{p'} = 0\cdot 1\, i^1$ identická. Konstrukce tato jest značně jednoduchá a užívá jako předešlá co nejvíce průseků pravoúhlých. V blízkosti vrcholu $1 \equiv v$ lze křivku nahraditi kružnicí křivosti, jíž přísluší poloměr $r_v = {}^2/_3\, \overline{vs'}$ [3]). Jakmile jsme křivku ^1M přesně sestrojili, rýsujeme ostatní, menší z vrcholů 2. 3 . . . 1. na základě podobnosti dle s'.

Když jsme Jarolímkovu stupnici (obr. 4.) pro jedničku $\overline{s'j}$ sestrojili, vraťme se k orthog. axonometrickému obrazu 3., v němž předpokládejme svítící bod s té mohutnosti, aby rovině ve vzdálenosti rovné jedničce obrazu 4. příslušel maximálně osvětlený bod intensity 1. Stanovme v obr. 3. vzdálenost $\overline{s_0 s_{10}}$ roviny π od bodu s jakož i úhel β dopadu zorných paprsků na rovinu π. Vedeme-li v obr. 4. kolmici π'_2 k ose X ve vzdálenosti $\overline{s'p} = \overline{s_0 s_{10}}$, získáváme v úsečkách mezi osou X a jednotlivými křivkami stupnice poloměry kruhových isofot roviny π intensity rovné celému počtu desetin jedničky; společný jejich střed s_1 jest pata kolmice z s na π spuštěné, i mohli bychom

[3]) Jarolímek, op. cit. strana 17.

isofoty zarýsovati. Veďme bodem s' (obr. 4) přímku $\overline{s'p'}$ pod úhlem β k ose X, označme její průsečík s π'_2 písmenou p' a přenesme $\overline{s'p'}$ od s' do p'' na osu X a nad $\overline{s'p''}$ co průměrem popišme kružnici, jejíž průsečík s π'_2 označme p'''. I jest

$\overline{s'p'''} = \sqrt{\overline{s'p} \cdot \overline{s'p''}}$, ale $\overline{s'p''} = \overline{s'p'} = \frac{\overline{s'p}}{\cos\beta}$,

jest tedy

$$\overline{s'p'''} = \sqrt{\frac{\overline{s'p}^2}{\cos\beta}} = \frac{\overline{s'p}}{\sqrt{\cos\beta}}$$

Přenesme tuto úsečku od s' na osu X do bodu ${}^1p$, jímž veďme přímku ${}^1\pi'_2 \perp X$ a průsečíkem jejím ${}^1q$ s meridianem ${}^1M$ paprsek $\overline{{}^1qs'}$, jehož průsečík s π'_2 označme q. Z úměrnosti

$\overline{s'q} : \overline{s'{}^1q} = \overline{s'p} : \overline{s'{}^1p} = 1 : \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}$ patrno, že pro intensity bodů

q a ${}^1q$ platí:

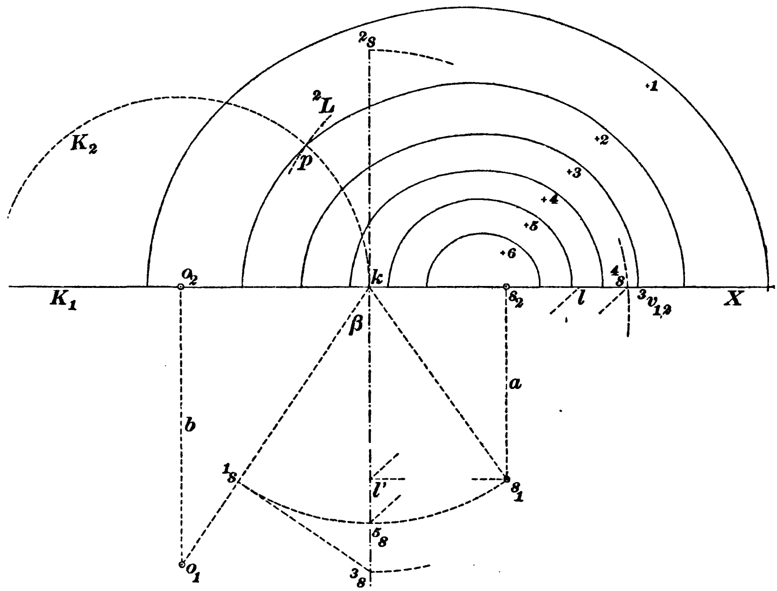
$$i_q : i_{1q} = \frac{\cos\alpha'}{\overline{s'q}^2} : \frac{\cos\alpha'}{\overline{s'{}^1q}^2} = \frac{\cos\alpha'}{\overline{s'q}^2} : \frac{\cos\alpha' \cos\beta}{\overline{s'q}^2}$$

kdež α' jest úhel $(ps'q)$ a ježto $i_{1q} = 0{\cdot}1\, i'$, jest $i_q = \frac{0{\cdot}1\, i'}{\cos\beta}$

a ježto se na rovinu π (obr. 3.) díváme v úhlu β, bude zdánlivá světlost isofoty kruhové, kol s_1 poloměrem $\overline{pq}$ popsané a mající skutečnou světlost $\frac{0{\cdot}1\, i'}{\cos\beta}$, $\cos\beta$-krát větší, tedy $0{\cdot}1\, i'$. Z toho patrno, že poloměry kruhových isofeng roviny π obdržíme, promítneme li na π'_2 (obr. 4.) průsečíky křivek Jarolímkovy stupnice s přímkou ${}^1\pi'_2$ od s' ve vzdálenosti $\frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}$-krát větší vedenou, než jest vzdálenost roviny π od bodu svítícího s. V obr. 3. zobrazeny ještě v dalších rovinách isofengy.

4. Zkoumejme konečně čtvrtý případ, kdy rovina jest centrálně promítnuta i osvětlena. V obr. 5. vytkněme nárysnu ν, oko mysleme si v bodu o, bod s buď bod svítící, jeho nárysu s_2 příslušejž skutečná světlost rovná jedničce. Ježto úsečka $\overline{ss_2}$ byla zvolena shodna s úsečkou $\overline{s'j}$ obrazu 4., lze Jarolímkovy stupnice v obr. 4. sestrojené i pro obraz 5. užíti. Vytkněme si v rovině ν kružnici K kol bodu o_2 popsanou, jest to geom.

místo bodů, jimž přísluší úhel dopadu β zorných paprsků; v důsledku čehož zdánlivá světlost podle kružnice K bude $cos\ \beta$-krát menší skutečné světlosti.



Obr. 5.

Vyšetřme úsečku $\frac{\overline{ss_2}}{\sqrt{cos\ \beta}}$; v obr. 5. učiněno $\overline{k^1s} = \overline{k^2s} = \overline{ks_1} = \overline{k^5s}$; $\overline{^1s^3s} \perp \overline{k^1s}$, tedy

$$\overline{k^3s} = \frac{\overline{k^1s}}{cos\ \beta},$$

jest proto:

$$\overline{k^4s} = \sqrt{\overline{k^3s} \cdot \overline{k^2s}} = \sqrt{\frac{\overline{ks_1}^2}{cos\ \beta}} = \frac{\overline{ks_1}}{\sqrt{cos\ \beta}},$$

dále $\overline{l'k} = \overline{s_1s_2}$ a $\overline{l'l} \parallel \overline{^4s^5s}$, z čehož $\overline{kl} = \frac{\overline{s_1s_2}}{\sqrt{cos\ \beta}}$.

V obr. 4. vedeny kolmice k ose X a to v'_2 ve vzdálenosti $\overline{s_1s_2}$ a $^1v'_2$ ve vzdálenosti $\overline{kl} = \frac{\overline{s_1s_2}}{\sqrt{cos\ \beta}}$ od bodu s'. Druhá z těchto přímek protíná křivku ${}^2M$ stupnice v bodě ${}^1n'$, z něhož paprskem $\overline{{}^1n's'}$ odvozen v v'_2 bod n'. Popišme v obr. 5. poloměrem $\overline{jn'}$ (obr. 4.) kružnici ${}^2L$; průsečík její s kružnicí K, bod p, náleží isofenze světlosti $0{\cdot}2\, i^1$ pro střed pozorování o. Jeť skutečná intensita bodu p s bodu s osvětleného $i_p = \frac{0{\cdot}2\, i^1}{\cos\beta}$, jak patrno z důvodů předešlého odstavce, zdánlivá světlost bodů kružnice K je $\cos\beta$-krát větší, tedy v bodě p rovna $0{\cdot}2\, i^1$. Tímto způsobem sestrojíme v řadě kružnic kol o_2 popsaných body, jichž zdánlivá světlost rovná se celému počtu desetin intensity jedničkové a přiměřeným jich spojením obdržíme isofengy žádané. Jsou to křivky jak zřejmo dle $\overline{o_2 s_2}$ orthogonálně souměrné, budou míti tudíž v ose X vrcholy, jež najdeme takto: Vytkněme v ose X libovolný bod k a přiřaďme mu ve stupnici (obr. 4.) bod ${}^1k'$ následovně: přenesme úsečku $\overline{s_2 k}$ od bodu j na v'_2 do k' a spojnici $\overline{s'k'}$ prodlužme do bodu ${}^1k'$ $\frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}$-krát, kdež β je úhel zorného paprsku pro bod k ($\overline{s'{}^1k'} = \frac{\overline{sk}}{\sqrt{\cos\beta}} = \overline{k^4 s}$ [obr. 5.]). Tím jsme přiřadili bodu k osy X (obr. 5.) bod ${}^1k'$ (obr. 4.) a ose X (obr. 5.) křivku X' ve stupnici Jarolímkově. Průsečíkům této křivky X' s křivkami stupnice odpovídají na paprscích svazku s' body v přímce v'_2, z nichž příslušné vrcholy isofeng v obr. 5. najdeme. V obr. 4. vyznačen bod ${}^3v''$ a jemu sdružený ${}^3v'$, přenesením úsečky $\overline{{}^3v'j}$ v příslušném směru (náležíť každá větev křivky X' jinému polopaprsku osy X bodem s_2 počínaje) od s_2 získán v obr. 5. vrchol ${}^3v$ isofengy světlosti $0{\cdot}3\, i^1$.*)

Znajíce sestrojiti isofengy roviny, můžeme sestrojiti isofengy jakékoli plochy rozvinutelné.

Podobným pak postupem k užitému v odstavci posledním, t. j. přiřaděním určitých křivek ve stupnici Jarolímkově ke

---

*) Isofengy roviny v za osvětlení centrálného a v rovněž centrálném obraze jsou křivky potenční 8ho stupně, procházející body kruhovými roviny v. Přísluší jim rovnice

$$a^2 b^2 = (o{\cdot}\mu\, i^1)^2\, (x^2 + y^2 + a^2)^3\, [(c - x)^2 + y^2 + b^2]$$

kdež spojnice $\overline{s_2 o_2}$ je osou souřadnou X, s_2 počátkem souřadnic; a, b jsou vzdálenosti bodů s a o od roviny v a $c = \overline{s_2 o_2}$.

křivce v ploše zvolené (při isofotách třeba jen jednu křivku přiřaditi, srov. Jarolímek, Centrál. osvětlení str. 29 a Procházka, Vybrané statě, 1913, odst. 132.) můžeme sestrojiti isofengy jakékoli plochy vůbec; případné konstrukce ponecháváme do dalšího článku.

Poznámka ku křivosti a problému normál kuželoseček středových.

Napsal dr. **Jos. Kounovský.**

1. Kuželosečka středová, elipsa nebo hyperbola, protata jest, jak známo, rovnostrannou hyperbolou Apolloniovou, procházející jejím středem a úběžnými body jejích os, obecně ve čtyřech bodech, jichž normály mají na hyperbole Apolloniově společný průsečík. Dotýká-li se specielně Apolloniova hyperbola kuželosečky uvažované, stanou se dvě normály soumeznými a jich průsečík středem křivosti kuželosečky pro bod dotyčný. Tímto způsobem sestrojil poprvé středy křivosti kuželoseček p. prof. dr. *J. Sobotka* v práci „Die Krümmungs-Halbmesser-Eigenschaften der Kegelschnitte".*)

Naskýtá se tu otázka geometrického místa středů Apolloniových hyperbol dané kuželosečky se dotýkajících.

Budiž dána (obr. 1) elipsa k_2 o poloosách $a = SU = SU_1$, $b = SV = SV_1$. Uvažujme o Apolloniově hyperbole dotýkající se elipsy v bodě B. Sestrojíme-li pravoúhlé průměty B_1, B_2 bodu B do os elipsy k_2, nachází se střed C hyperboly na spojnici $B_1 B_2$, při čemž BC svírá s osami elipsy, t. j. s asymptotami hyperboly týž úhel jako tečna elipsy v bodě B.

Za účelem stanovení geometrického místa l středu C sestrojme nejprve evolutu l' elipsy k_2 jako geometrické místo středů křivosti C' jejích bodů B. Střed křivosti C' určíme pomocí Steinerovy paraboly, dotýkající se os dané elipsy k_2, a její tečny a normály v bodě B, jako dotyčný bod na této normále; při tom jest SB řídicí přímkou paraboly. Označme normálu 12,

*) Věstník Král. čes. společnosti nauk, Praha 1894.