Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Miloš Kössler

Řešení algebraické rovnice výrazy meznými

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 2, 162–169

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121409

listický nádech. Tak často opakovaný požadavek, aby všecky vědecké objekty byly definovatelny *konečným počtem slov*, připomíná středověké these nominalistické, dle nichž *obecné pojmy* nemají větší existenci než slova, jimiž jsou vyjádřeny, takže na konec převádějí se jen na pouhé zvuky *flatus vocis*.

Řešení algebraické rovnice výrazy meznými.

Napsal **M. Kössler.**

Bernoulli-ho methoda řešení algebraické rovnice vyjadřuje největší co do absolutní hodnoty kořen jako limitu, ku které konverguje řada čísel

$$\frac{s_1}{s_0}, \frac{s_2}{s_1}, \frac{s_3}{s_2}, \ldots, \frac{s_{k+1}}{s_k}, \ldots, \qquad (a)$$

kdež jest

$$s_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k + \ldots + \alpha_n^k$$

a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ jsou kořeny rovnice.

Řešení toto můžeme pokládati do jisté míry za obecné, protože čísla s_k dovedeme vypočísti jako funkce obecných koeficientů rovnice a řada (a) definuje tedy, má-li ovšem limitu jistou funkci těchto obecných koeficientů.

Přirozeně naskýtá se otázka, zda a za jakých okolností bylo by možno rozšířiti tuto methodu tak, aby nám dovolovala vyjádřiti současně *všechny* kořeny rovnice n-tého stupně jako limity řád obdobných řadě (a), to jest vyjádřiti je jako funkce obecných koeficientů rovnice.

Pro jistý typ rovnic řešen jest problem tento v řádcích následujících. K typu onomu patří na př. všechny rovnice, které mají jen reálné kořeny.

Výsledek shrnutý ve vzorcích (10a) a (11) ukazuje, že pomocí čísel s_k můžeme vyjádřiti všechny kořeny jako limity řad obdobných řadě (a).

Budiž

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \ldots (1)$$

algebraická rovnice n-tého stupně, která může míti kořeny mnohonásobné, takže jest

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{p_1} \cdot (x-\alpha_2)^{p_2} \ldots (x-\alpha_r)^{p_r} \ldots \quad (1a)$$

kdež $p_1, p_2, \ldots p_r$ jsou celistvá kladná čísla splňující podmínku

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r = n.$$

O absolutních hodnotách kořenů budeme dále předpokládati, že splňují nerovnosti

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > |\alpha_3| > \ldots > |\alpha_r| \ldots \quad (2)$$

Podmínkám hoví na př. taková rovnice, která má jen realné a kladné*) kořeny.

Logarithmická derivace rovnice (1a) jest

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{p_1}{x-\alpha_1} + \frac{p_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{p_r}{x-\alpha_r} \ldots \quad (3)$$

Pro všechna x, jichž absolutní hodnota jest větší než $|\alpha_1|$, dá se každý sčítanec pravé strany poslední rovnice rozvinouti v geometrickou řadu podle mocnin čísel

$$\frac{\alpha_1}{x}, \frac{\alpha_2}{x}, \ldots \frac{\alpha_r}{x}.$$

Tak obdržíme

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{s_0}{x} + \dfrac{s_1}{x^2} + \dfrac{s_2}{x^3} + \ldots + \dfrac{s_m}{x^{m+1}} + \ldots, \\ \text{kdež} \\ s_0 = n, \; s_m = p_1\alpha_1^m + p_2\alpha_2^m + \ldots + p_r\alpha_r^m \end{array}\right\} \ldots (4)$$

Z poslední rovnice vyplývá se zřetelem k nerovnosti (2) vzorec Bernoulli-ho

$$\alpha_1 = \lim_{m=\infty} \frac{s_{m+1}}{s^m}.$$

---

*) Předpoklad kladných kořenů není na újmu všeobecnosti. Každá rov., která má realné kořeny, převede se substitucí $y = x^2$ na rovnici o kořenech realných a kladných.

Čísla s_m sama určena jsou, jak známo, rekurrentními vzorci

$$\left.\begin{array}{l} s_0 = n \\ s_1 + a_1 = 0 \\ s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ s_n + a_1 s_{n+1} a_2 s_{n-2} + \dots + na_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_{n+k} + a_1 s_{n+k-1} + a_2 s_{n+k-2} + \dots + a_n s_k = 0 \\ \qquad k = 1, 2, 3, \dots \end{array}\right\} \quad (5)$$

Zaveďme nyní označení

$$f_k(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{k-1}) = x^{k-1} + A_1^{(k-1)} x^{k-2} + \\ + \dots + A_{k-1}^{(k-1)}$$

a násobme tímto výrazem první z rovnic (4).

$$\frac{f'(x) \cdot f_k(x)}{f(x)} = \left(x^{k-1} + A_1^{(k-1)} x^{k-2} + \dots + A_{k-1}^{(k-1)}\right) \\ \left(\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \dots + \frac{s_m}{x^{m+1}} + \dots\right).$$

Provedeme-li na pravé straně násobení a označíme-li koeficient mocniny $\frac{1}{x^{m+1}}$ číslem $C_m^{(k)}$, obdržíme rovnici

$$C_m^{(k)} = s_{m+k-1} + A^{(k-1)} s_{m+k-2} + \dots + A_{k-2}^{(k-1)} s_{m+1} + \\ + A_{k-1}^{(k-1)} s_m . \quad (6)$$

Sem dosadíme za s příslušné hodnoty ze vzorce (4) a spojíme mocniny čísla α_1, α_2, atd., čímž dostaneme

$$C_m^{(k)} = p_1 \alpha_1^m f_k(\alpha_1) + p_2 \alpha_2^m f_k(\alpha_2) + \dots + p_{k-1} \alpha_{k-1}^m f_k(\alpha_{k-1}) + \\ + p_k \alpha_k^m f_k(\alpha_k) + p_{k+1} \alpha_{k+1}^m f_k(\alpha_{k+1}) + \dots + p_r \alpha_r^m f_k(\alpha_r).$$

První řádek odpadne, protože podle definice jest

$$f_k(\alpha_1) = f_k(\alpha_2) = \dots = f_k(\alpha_{k-1}) = 0,$$

v druhém řádku však budou všechny členy od nully různé, protože žádné z čísel α_k, α_{k+1}, ... α_r není kořenem rovnice $f_k(x) = 0$.

Tedy bude

$$\frac{C^{(k)}_{m+1}}{C^{(k)}_m} = \alpha_k \frac{p_k f_k(\alpha_k) + \left(\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right)^{m+1} p_{k+1} f_k(\alpha_{k+1}) + \ldots}{p_k f_k(\alpha_k) + \left(\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right)^{m} p_{k+1} f_k(\alpha_{k+1}) + \ldots}$$

Přejdeme-li k limitě $m = \infty$, bude zlomek na pravé straně roven jedné, protože podle nerovnosti (2) jest

$$\lim_{m=\infty} \left(\frac{\alpha_{k+r}}{\alpha_k}\right)^m = 0$$

a tedy

$$\alpha_k = \lim_{m=\infty} \frac{C^{(k)}_{m+1}}{C^{(k)}_m} \quad \ldots \tag{7}$$

Čísla $C^{(k)}$ jsou určena vzorcem (6) jako funkce čísel s a neznámých koeficientů $A^{(k-1)}$. Tyto vyloučíme z počtu následující úvahou. Myslíme si rovnici (6) utvořenou pro indexy m, $m+1$, $m+2$, $\ldots m+k-1$. Z tak vzniklého systému k lineárních rovnic vyloučíme $(k-1)$ čísel $A^{(k-1)}_1$, $A^{(k-1)}_2$, $\ldots A^{(k-1)}_{k-1}$. Výsledek eliminace tvoří rovnice

$$\begin{vmatrix} s_{m+k-1} - C^{(k)}_m & s_{m+k-2} & s_{m+k-3} \ldots & s_m \\ s_{m+k} - C^{(k)}_{m+1} & s_{m+k-1} & s_{m+k-2} \ldots & s_{m+1} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ s_{m+2k-2} - C^{k}_{m+k-1} & s_{m+2k-3} & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & s_{m+k-1} \end{vmatrix} = 0,$$

místo níž můžeme psáti podle známého pravidla pro determinanty

$$\Delta^{(k)}(m) = \Delta^{(k)}_1(m), \ldots \tag{8}$$

kdež značí

$$\Delta^{(k)}(m) = \begin{vmatrix} s_{m+k-1} & s_{m+k-2} \ldots & s_m \\ s_{m+k} & s_{m+k-1} \ldots & s_{m+1} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ s_{m+2k-2} & s_{m+2k-3} \ldots & s_{m+k-1} \end{vmatrix} \quad \ldots \tag{8a}$$

$$\Delta_1^{(k)}(m) = \begin{vmatrix} C_m^{(k)} & s_{m+k-2} & s_{m+k-3} & \ldots & s_m \\ C_{m+1}^{(k)} & s_{m+k-1} & s_{m+k-2} & \ldots & s_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ C_{m+k-1}^{(k)} & s_{m+2k-3} & s_{m+2k-4} & \ldots & s_{m+k-1} \end{vmatrix} \quad \ldots (8b)$$

Poslední determinant můžeme transformovati užívajíce pravidla, že determinant se nemění, přičteme-li k prvkům některého sloupce stejnolehlé prvky jiného sloupce násobené libovolným číslem.

Násobíme tedy prvky třetího sloupce číslem $A_1^{(k-2)}$ a přičteme je k prvkům druhého sloupce; potom k prvkům téhož sloupce přičteme prvky čtvrtého sloupce násobené číslem $A_2^{(k-2)}$; pak přičteme sloupec pátý, šestý atd., každý násobený příslušným číslem $A^{(k-2)}$. Tak obdržíme na př. místo prvního prvku druhého sloupce součet

$$s_{m+k-2} + A_1^{(k-2)} s_{m+k-3} + A_2^{(k-2)} s_{m+k-4} + \ldots + A_{k-2}^{(k-2)} s_m$$

a ten jest podle vzorce (6) roven číslu $C_m^{(k-1)}$. Podobně bude u ostatních prvků druhého sloupce. Jeho prvky se tedy nahradí čísly

$$C_m^{(k-1)},\ C_{m+1}^{(k-1)},\ C_{m+2}^{(k-1)},\ \ldots,\ C_{m+k-1}^{(k-1)}.$$

Analogický pochod provedeme nyní s prvky třetího sloupce, čtvrtého a t. d.

Tak obdržíme

$$\Delta_1^{(k)}(m) = \begin{vmatrix} C_m^{(k)} & C_m^{(k-1)} & C_m^{(k-2)} & \ldots & C_m^{(2)} & s_m \\ C_{m+1}^{(k)} & C_{m+1}^{(k-1)} & C_{m+1}^{(k-2)} & \ldots & C_{m+1}^{(2)} & s_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ C_{m+k-1}^{(k)} & C_{m+k-1}^{(k-1)} & C_{m+k-1}^{(k-2)} & \ldots & C_{m+k-1}^{(2)} & s_{m+k-1} \end{vmatrix} \quad \ldots (8c)$$

což dosadíme do rovnice (8).

Z téže rovnice vyplývá zavedením $(m+1)$ místo m

$$\Delta^{(k)}(m+1) = \Delta_1^{(k)}(m+1)$$

a tedy dělením

$$\frac{\Delta_1^{(k)}(m+1)}{\Delta_1^{(k)}(m)} = \frac{\Delta^{(k)}(m+1)}{\Delta^{(k)}(m)} \qquad \ldots (9)$$

Napíšeme nyní $\Delta_1^{(k)}(m)$ ve tvaru

$$\Delta_1^{(k)}(m) = C_m^{(k)} C_m^{(k-1)} \ldots C_m^{(2)} \,.\, s_m \,.\, \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{C_{m+1}^{(k)}}{C_m^{(k)}} & \frac{C_{m+1}^{(k-1)}}{C_m^{(k-1)}} & \ldots & \frac{s_{m+1}}{s_m} \\ \frac{C_{m+2}^{(k)}}{C_m^{(k)}} & \frac{C_{m+2}^{(k-1)}}{C_m^{(k-1)}} & \ldots & \frac{s_{m+2}}{s_m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \\ \frac{C_{m+k-1}^{(k)}}{C_m^{(k)}} & \frac{C_{m+k-1}^{(k-1)}}{C_m^{(k-1)}} & \ldots & \frac{s_{m+k-1}}{s_m} \end{vmatrix}$$

Determinant na pravé straně označíme symbolem $D(m)$ a utvoříme podobně sestrojený výraz pro $\Delta_1^{(k)}(m+1)$. Dělením obou výsledků docházíme ke vzorci

$$\frac{\Delta_1^{(k)}(m+1)}{\Delta_1^{(k)}(m)} = \frac{C_{m+1}^{(k)}}{C_m^{(k)}} \cdot \frac{C_{m+1}^{(k-1)}}{C_m^{(k-1)}} \cdots \frac{C_{m+1}^{(2)}}{C_m^{(2)}} \cdot \frac{s_{m+1}}{s_m} \cdot \frac{D(m+1)}{D(m)},$$

jehož limitu pro $m = \infty$ určíme následovně.

Podle vzorce (7) jest $lim \dfrac{C_{m+1}^{(k)}}{C_m^{(k)}} = \alpha_k$ a tedy

$$lim \frac{C_{m+r}^{(k)}}{C_m^{(k)}} = lim \frac{C_{m+r}^{(k)} \cdot C_{m+r-1}^{(k)} \cdots C_{m+1}^{(k)}}{C_{m+r-1}^{(k)} \cdot C_{m+r-2}^{(k)} \cdots C_m^{(k)}} = \alpha_k^r .$$

Z toho plyne

$$lim\, D(m+1) = lim\, D(m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_k & \alpha_{k-1} & \alpha_{k-2} & \ldots & \alpha_1 \\ \alpha_k^2 & \alpha_{k-1}^2 & \alpha_{k-2}^2 & \ldots & \alpha_1^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_k^{k-1} & \alpha_{k-1}^{k-1} & \alpha_{k-2}^{k-1} & \ldots & \alpha_1^{k-1} \end{vmatrix}$$

Tento Vandermondův determinant jest od nully různý, protože jsme hned z počátku předpokládali

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > |\alpha_3| > \ldots > |\alpha_r|.$$

Tedy jest

$$\lim_{m=\infty} \frac{\Delta_1^{(k)}(m+1)}{\Delta_1^{(k)}(m)} = \alpha_k \cdot \alpha_{k-1} \cdot \alpha_{k-2} \ldots \alpha_2 \cdot \alpha_1,$$

což dosazeno do vzorce (9) dává konečně

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \alpha_{k-1} \cdot \alpha_k = \lim_{m=\infty} \frac{\Delta^{(k)}(m+1)}{\Delta^{(k)}(m)} \text{*)} \ldots (10)$$

V této formuli jest $\Delta^{(k)}(m)$ definováno rovnicí (8a) a veličiny s_r tam se vyskytující vzorci (5).

Pro $k = 1, 2, 3$, a t. d dostáváme

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 = \lim_{m=\infty} \frac{s_{m+1}}{s_m} \qquad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \lim_{m=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{m+2} & s_{m+1} \\ s_{m+3} & s_{m+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{m+1} & s_m \\ s_{m+2} & s_{m+1} \end{vmatrix}} \\
&\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \lim_{m=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{m+3} & s_{m+2} & s_{m+1} \\ s_{m+4} & s_{m+3} & s_{m+2} \\ s_{m+5} & s_{m+4} & s_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{m+2} & s_{m+1} & s_m \\ s_{m+3} & s_{m+2} & s_{m+1} \\ s_{m+4} & s_{m+3} & s_{m+2} \end{vmatrix}} \quad \text{a t. d.}
\end{aligned}\right\} \quad (10a)$$

Z rovnice (10) jde dále

$$\alpha_k = \lim_{m=\infty} \frac{\Delta^{(k)}(m+1) \cdot \Delta^{k-1}(m)}{\Delta^{(k)}(m) \cdot \Delta^{(k-1)}(m+1)} \quad \ldots (11).$$

*) Podobné vzorce dají se odvoditi i pro ostatní základní symmetrické funkce $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \ldots$, a t. d.

Vzorec tento jest řešením problemu, protože vyjadřuje k-tý co do absolutní velikosti kořen algebraické rovnice (1) jako limitu výrazu sestrojeného z *obecných* koeficientů rovnice (1).

O isofengách ploch osvětlených geometrálně neb středově a zobrazených v průmětech rovnoběžných nebo centrálných.

Dr. Fr. Kadeřávek.

Úkolem tohoto článku jest vyšetření křivek stejné zdánlivé světlosti, či t. zv. isofeng na plochách pro možné kombinace osvětlení rovnoběžného neb středového s promítáním parallelním neb centrálním. Řídíce se spisy staršími, chceme řešení úkolu provésti v předpokladu, že zdánlivá světlost prvku plošného jest přímo úměrna cosinu úhlu sevřeného normálou prvku a paprskem zorným, rovněž přímo úměrna cosinu úhlu dopadu paprsku světelného a v případě osvětlení středového nepřímo úměrna se čtvercem vzdálenosti prvku pozorovaného od svítícího bodu.

Při osvětlení *roviny* nastávají čtyři případy a to:

1. Rovina ϱ jest osvětlena paprsky rovnoběžnými a zobrazena v promítání rovnoběžném. Zdánlivá světlost roviny jest v celém rozsahu průmětu táž, rovná $\iota^{\varrho} = \iota^1 \cos\alpha \cos\beta$, kdež α a β jsou úhly sevřené světelným a zorným paprskem s normálou roviny ϱ, ι^1 jest jedničkou světlosti; volíme za ni *skutečnou* světlost roviny kolmo paprsky světelnými osvětlované.

2. Rovina ϱ buď osvětlena rovnoběžně paprsky S a promítnuta ze středu s. Spusťme s bodu s kolmici O na rovinu ϱ, patu její označme o, dále veďme bodem s paprsek S a rovinu (OS) zvolme za pomocnou průmětnu (obr. 1.). Opišme kol bodu S poloměrem $\overline{s1}$. rovným zvolené jedničce kružnici K; délku $\overline{s1}$. rozdělme na 10 stejných dílů a v dělících bodech vztyčme kolmice k ose O. Ježto paprsky S dopadají na rovinu ϱ pod úhlem α, jest skutečná světlost roviny ϱ úměrna $\cos\alpha$, jejž snadno spuštěním kolmice $\overline{kl}$ s průsečíku k paprsku S s kruž-