Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Vorovka

Jak soudil H. Poincaré o vztazích mathematiky k logice

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 2, 154--162

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121406

Naproti tomu jest

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Rovnici (1) lze však vyhověti, jestliže na pravé straně za α volíme vypuklý úhel $\frac{3\pi}{2}$ místo $\frac{\pi}{2}$; pravá strana rovná se pak ploše P_1.

Jak soudil H. Poincaré o vztazích mathematiky k logice.*)

Napsal dr. K. Vorovka.

Chceme-li nabýti přehledu v té veliké rozmanitosti myšlenek, které Poincaré ve svých polemikách často jen nadhodil, učiníme snad nejlépe, seskupíme-li látku kol několika hesel:

Intuice co extralogický princip mathematického poznání.

Mnozí logikové učí, že mathematika co věda jest povahy výlučně deduktivní; že každý postup, kterým mathematika z pravd již poznaných vyvíjí pravdy nové, jest jen přechod od obecného ku zvláštnímu, a že tedy každá nová poučka, kterou chceme dokázati, jest vlastně již v základních definicích obsažena. Kdyby tomu tak skutečně bylo, pak by celá mathematika nebyla než jedinou ohromnou tautologií. Každý mathematický theorém dal by se proměniti v logickou indentitu $a \equiv a$. K tomu stačilo by pouze místo všech používaných vědeckých názvů dosaditi jejich smysl vyjádřený základními definicemi.

S tímto názorem Poincaré nesouhlasil. Vždyť na př. co chvíli čteme práce jednající o zobecnění té neb oné poučky, a to jest patrně krok od zvláštního k obecnému. Získává-li tedy mathematika nové pravdy — které nejsou pouhými tautologiemi —, musí tato věda míti nějaké prostředky *extralogické, na logické principy*

*) Rozšířený výňatek z přednášky »H. Poincaré co filosof«, konané v J. Č. M. a F. v lednu 1913.

nepřevoditelné. Toť jedna ze základních thesí Poincaréových. Že se tím přiblížil filosofii Kantově, tomu nasvědčuje i ta okolnost, že přijal Kantovo názvosloví, když na př. princip úplné indukce prohlásil za opravdový *synthetický soud a priori*, jemuž se duch vymknouti nemůže. Tím ovšem nechtěl říci, že princip úplné indukce jest *jediným* extralogickým prvkem mathematiky. Materiál, ze kterého jsou vystavěny vědy mathematické, jest obsažen ve značném počtu nedokazatelných vět, ať již slovou axiomy či postuláty, a může býti spor pouze o to, co má se považovati za pravdu nepřevoditelnou a co za soudy analytické, t. j. logicky z jiných postulátů vyplývající. V souhlasu s tímto názorem dovedl Poincaré podati skvělý a spravedlivý rozbor Hilbertových Grundlagen der Geometrie, v němž zásluhy Hilbertovy o axiomatiku geometrie vysoce ocenil.

Za to ocitl se ve sporu s B. Russellem, jehož práce nesou se za cílem převésti veškerou mathematiku — především ovšem arithmetiku — na logiku. B. Russell došel až k tvrzení, že „veškerá mathematika jest symbolická logika“, a chce odvoditi všechny základní mathematické pravdy „z logických principů logickými principy“. Tu mohlo by se zdáti, že jest to jen spor o význam slova „logický“. Poincaré má totiž vždy na mysli jen aristotelovskou logiku tříd s jejími třemi principy identity, kontradikce a exclusi tertii, s nimiž by Russell nevystačil. Russell naproti tomu do logiky přijímá celou řadu nedokazatelných zásad, o nichž se domnívá, že neobsahují nic arithmetického. Spor však má kořeny mnohem hlubší a Poincaré naznačil jej slovy „spor mezi Kantem a Leibnitzem“.

Leibnitz, který po celý život zabýval se plánem počtu logického, věřil ve všemohoucnost logiky.

Kant prohlásil, že s pouhou logikou se v mathematice nevystačí; že nutno vyjíti od synthetických soudů platných a priori, vyplývajících z t. zv. nazíracích forem času a prostoru.

H. Poincaré, ačkoliv spíše stojí po straně Kantově, jest velmi toho dalek, aby z Kanta prostě přejímal filosofický princip označený slovem „reine Anschauung“. Sám ovšem také musil zabočiti do filosofie, do theorie poznání, když chtěl vysvětliti povahu těch extralogických principů bez nichž by mathematika byla pouhou tautologií. V geometrii výklad jeho bral se směrem, který naznačuje slovo „convention"; jím chtěl rozřešiti otázku, jak dalece zkušenost má vliv na volbu geometrických axiomů.

V arithmetice však o zkušenosti nemůže býti řeči; a tu Poincaréovy myšlenky orientovány jsou dle slova *„intuition"*. Název tento nedá se vhodně přeložiti českým „názor", jelikož slovem tímto vyvolává se představa názoru smyslového; naproti tomu Poincaré, ačkoliv neubránil se jakési mnohoznačnosti, mínil slovem intuice poznání třebas nanejvýš *abstraktní* (intuition du nombre pur), které však nevyplývá z řetězu úsudků a jest tedy bezprostřední.

Tuto více méně neurčitou představu intuice objasňuje Poincaré psychologicky zajímavými doklady z prací slavných mathematiků a s oblibou také vrací se vícekráte ku přirovnání s hrou v šachy.

Při této hře nestačilo by ku porozumění pouze kontrolovati správnost tahů, zdali se dějí dle pravidel předepsaných; abychom strategii hráče pochopili, abychom chápali účelnost jeho tahů, musíme z dálky viděti cíl, k němuž hra míří. Zcela podobně při důkazu mathematickém nestačí pouze dle pravidel logiky konstatovati správnost konklusí, nýbrž nutno pochopiti, proč definice, konkluse, theorémy právě tím určitým a ne jiným způsobem v celek jsou seřaděny. Tato organická jednota dá se postihnouti jen jediným bystrým postřehem, a je-li tato schopnost potřebna při studiu již hotového důkazu, jest tím nutnější při objevování pravd nových. Jako pouhá empirie, tak i pouhá logika byla by jen tápáním ve tmě, kdyby nepřistupovala k ní ta nejduševnější, nejvnitřnější, veškeré vázanosti smyslů často odporující a celým mrtvým mechanismem logiky pohybující síla ducha, která jest snad pravým nejvlastnějším intellektem, totiž intuice.

Neužitečnost logistiky.

Takové intuice dovolával se také Poincaré, když princip úplné indukce — vyslovený v podobě co nejobecnější — prohlásil za pravý synthetický soud a priori. Praví o něm: „Proč tedy tento soud vnucuje se nám s neodolatelnou evidencí? Protože se jím pouze klade mohutnost ducha vědoucího, že může pochopiti nekonečné opakování jednoho a téhož skutku, jakmile tento skutek jen jednou byl možným. Duch má přímou intuici této mohutnosti a zkušenost jest pro něho jen příležitostí, aby jí použil a tak si ji uvědomil."

Tento Poincaré-ův názor potkal se s mnohostranným odporem. V Anglii tvrdil Russell, že princip úplné indukce není nic jiného, než definice konečných čísel celých. Ve Francii po bok se mu postavil Couturat. V Německu poukazovali k tomu, že prý Dedekind a Frege podali důkazy onoho principu. V Italii škola Peanova chtěla cestou čistě logickou vybudovati pojem nuly. jednotky. atd. Jenže při tom jedni vyvraceli druhé a navzájem nalézali ve svých definicích chybné kruhy. Aby svým logickým pochodům dodali naprosté exaktnosti, používali ve svých vývodech t. zv. mathematické logiky čili logistiky, t. j. jakési symbolické řeči, kterou Poincaré sarkasticky nazval peanovština.

K logistice zaujal Poincaré stanovisko naprosto zamítavé. Jsou to hlavně dva body, kol nichž se kupí jeho námitky. Předně vytýká logistice, že jest při vlastním badání bezcenná neposkytujíc žádné pomoci heuristické. Ba musí působiti právě naopak; neboť symboly mathematické logiky mají vlastně ten účel, aby nic nezůstalo nevyřčeno, aby všechny logické vztahy byly podány co možná *explicite.* — Nemůže věru býti sporu o tom, že skutečně by tyto symboly ducha při badání vlastně zdržovaly a že by mu místo křídel přivazovaly berly. Logistikové však mohli se proti této námitce hájiti poukazem, že chtějí pouze myšlenku již hotovou do nejskrytějších koutů sledovati a ji při každém kroku usvědčovati. — Tu však přichází k platnosti druhá námitka Poincaréova: Logistika je bezcenná i pro logické badání. Hodí se dobře k tomu aby svojí nesrozumitelností a zdánlivou učeností zakryla chybné kruhy, aby odvodila větu tak důležitou, jako že jednotka jest číslo, ale před skutečnou úlohou, před opravdovou obtíží jest bezmocna. — A logistikové opravdu nedovedli rozřešiti paradoxy, k nimž dospěli zvláště v oboru aktuálního nekonečna.

Podstata antinomií.

Na prvou takovou antinomii narazil Burali-Forti v nauce o číslech transfinitních ordinálních. Následovaly však brzo antinomie jiné a dala by se jich sestaviti řada neomezená. Společná povaha těchto antinomií vysvitne snad nejlépe z antinomie Richardovy, na níž také demonstroval Poincaré svoje smýšlení.

Uvažujme, jakou množinu tvoří všechny lidské pojmy. Co však se nedá definovati konečným počtem slov, to nebudeme považovati za přesně definovaný pojem. Sestavíme tady množinu objektů definovatelných konečným počtem slov. Tato množina jest očividně spočetná jsouc ekvivaletní množině čísel celých.

Kontinuum jest co myšlenkový výtvor také množina definovatelných objektů a Cantor o ní dokázal, že jest to množina nespočetná.

Richardův a Cantorův výsledek jsou ve vzájemném sporu.

K tomuto paradoxu podává Poincaré následující vysvětlení, které co do podstaty poznal již sám Richard: — Mysleme si sbírku všech možných vět. Z ní podržíme jen ty věty, které nám budou moci definovati jednotlivé body nějaké úsečky, a ostatní věty přeškrtneme. Body definované přiřadíme dle nějakého zákona číslům přirozené řady. Tím však mnohé věty, které dříve žádného bodu nedefinovaly, nabudou určitého smyslu, a budeme je musit do naší sbírky zařadit. To však bude míti za následek očíslování nové atd. Richard tedy tvrdí, že zastavíme-li tento proces při určitém stupni, obdržíme vždy množinu spočetnou, Cantor pak tvrdí, že tento proces lze do nekonečna prodloužiti, čímž spor odstraněn.

Aby logická stránka této věci lépe vynikla, zdržme se s Poincarém ještě u paradoxa, které ve známost uvedl Russell. — Jedná se o číslo, určené následující podivnou definicí: „Nejmenší z čísel, která se nedají definovati větou obsahující méně než sto slov.“ — Existuje vůbec takové číslo? — Odpovědi jsou dvě: ano i ne. — Kdyby totiž takové číslo existovalo, pak by v sobě obsahovalo spor; neboť bylo by definováno též hořejší větou, která obsahuje malý počet slov. — I zde opět mysleme si listinu vět definujících čísla celá a uspořádejme ty věty do skupin podle počtu slov. Naše číslo by se nalézalo teprve v oddělení stém. Kdybychom však takto zakončili klasifikaci oněch vět, nabyly by některé věty smyslu, kterého dříve neměly, a my bychom je musili do původního seřadění vsunouti, čímž bychom dřívější klasifikaci porušili.

V obou těchto antinomiích definuje se jeden člen třídy, obsahující neomezené množství členů, pomocí *celé* třídy a tedy do jisté míry sám sebou. Takové definice nazval Russell bezpřísudkové (nonpredicative). Aby se pak vyhnul sporům z takových kruhů plynoucím, musil Russell celou dřívější svoji soustavu logistiky zavrhnouti a postaviti novou — o níž tvrdí, že jest definitivní a že jest navždy před antinomiemi pojištěna. Soustava tato zavádí t. zv. *hierarchii typů.* Na toto učené slovo vrhnul však Poincaré ostré světlo, v němž se nám zjevuje ta celá věc skoro nicotnou. Vzpomeňme jen na Epimenidovo sofisma o Kréťanu pravícím, že všichni Kréťané vždycky lhou.

Dle Russellova návodu rozřešíme toto sofisma hierarchií lhářů. Definujeme především lháře 1-ho řádu, kteří lhou vždycky, vyjímaje když praví: já jsem lhář 1-ho řádu. Lháři druhého řádu lhou vždy, a to i tenkráte, praví-li, já jsem lhář 1-ho řádu; nelhou však, řeknou-li, já jsem lhář 2-ho řádu atd. A řekne-li nám tedy Epimenides: já jsem lhář, zeptáme se ho, kolikátého řádu. Teprve až nám tuto oprávněnou otázku zodpoví, bude jeho tvrzení míti určitý smysl.

Methodické příkazy nauce o množinách.

Z takovýchto úvah odvozuje Poincaré tři methodické rady, které by mohly míti mocný vliv na celou nauku o množinách, a to: *1. Zabývati se jen objekty, které se dají definovati konečným počtem slov. 2. Neztráceti se zřetele, že každý výrok o nekonečnu má býti překladem, stručným vyslovením výroků o konečnu. 3. Vyhýbati se klasifikacím a definicím nepřísudkovým.*

Tím zároveň vyslovil ortel nad aktuálním nekonečnem Cantorovým. Russell však přece jen chce pojem čísla konečného vyvozovati z čísel transfinitních. A tu zakončil Poincaré diskussi prohlášením, ve kterém se dovolává psychologie: „Pan Russell mně řekne bezpochyby, že nejedná se o psychologii, nýbrž o logiku a noetiku, a já zase odpovím, že není logiky a noetiky nezávislé od psychologie, a toto vyznání víry uzavře nejspíše diskussi, protože učiní zcela zřejmou neodstranitelnou divergenci v našem nazírání."

Idealismus a realismus v mathematice.

Spor tento zůstal nerozhodnut Každá z obou stran setrvala při vlastním přesvědčení. Jestliže si dva filosofové nerozumějí, nedivíme se tomu; jestliže však dva mathematikové nemohou ke shodě dojíti, jsme překvapeni; neboť není myslitelno, aby proti nějaké mathematické pravdě zůstala u jistých vyškolených a zdravě soudících mathematiků trvalá opposice. Zde však se uskutečňuje tento paradoxní případ. Poincaré opakuje dřívější námitky a kupí nové nejen proti mnohým větám, nýbrž i proti některým pojmům, které do mathematiky zavedl G. Cantor a jeho přívrženci. Tito zase, jakoby Poincaréových námitek ani neslyšeli, pokračují nerušeně dále v odvozování nových a nových vět o aktuálním nekonečnu. — Jak jest tato neshoda možna? Proč jedni druhým nerozumějí? Na tuto otázku chtěl sám sobě odpověděti Poincaré a to co možná nestranně. *)

Patrně jedná se o nějaký základní rozdíl v nazírání, a ten chtěl Poincaré vystihnouti povahopisem obou škol. Mathematikové z tábora Poincaréova požadují, aby každý výrok o nekonečnu byl stručným výrazem nějakého výroku o konečnu. Tak tomu jest na př., pravíme-li, že pro $x = \infty$ jest $lim\ \frac{1}{x} = 0$. Proč však omezují tak úzce obor lidského myšlení? Právě proto, že mathematiku nedovedou jinak pojímati, než co *lidské myšlení*. Člověk nemůže si mysliti něco jiného než myšlenku. „Vše, co není myšlenka, jest pouhé nic," praví vzletně Poincaré ke konci svojí knihy „La valeur de la science". Toť zřejmá formule *filosofického idealismu*, který jsoucno stotožňuje s představou. Protože však my lidé jsme koneční nejen v činech, ale i v myšlenkách a jejich výrazech, totiž ve slovech a jiných smyslových znacích,

*) H. Poincaré, Dernières pensées, kap. V.

jest nutně i mathematika podmínkou konečnosti vázána. Existuje pouze to, co dá se konečným počtem slov definovati. Proto Poincaré připouští na př. výrok, že množina všech čísel reálných est nespočetná; tato věta pro něho znamená pravdu zcela jasného smyslu, že totiž nelze konečným počtem slov definovati zákon, kterým by se každému číslu reálnému přiřaďovalo nějaké číslo celé. Neuznává však větu Zermelovu, dle níž každá množina může býti úplně seřazena; neboť Zermelo nemůže konečným počtem slov definovati úkony, jimiž by se ono uspořádání provedlo. Úkonů těch by totiž byla řada nespočetná.

Cantorovi přívrženci neuznávají požadavek konečnosti. Nepohlížejí na mathematiku co na souhrn lidských myšlenek, nýbrž co na souhrn věčných pravd od lidstva zcela neodvislých, které mají svoji vlastní existenci a realitu. Jejich nazírání jest tedy v podstatě *filosofický realismus*. Veškeré konečno považují jen za část nekonečna. Existence konečna jest podmíněna existencí nekonečna; svět čísel konečných jest obsažen ve světě čísel nekonečných.

Rozdíl obou škol jest tedy rozdíl filosofický, nikoliv mathematický. Mathematika však nemůže zde rozhodnouti ani obyčejnou *verifikací* vět objevených; neboť verifikace jest možna jen v oboru konečna. Při tom mezi řádky čteme otázku, která tam Poincaréovi proklouzla, třeba že chtěl býti zcela nestranným. Otázka tato zní: Jakou tedy vědeckou cenu mají takové poučky, u nichž verifikace není vůbec možna?

Že charakteristika, kterou podal Poincaré, jest velmi případná, k tomu zde budiž ještě jeden doklad odjinud uveden. B. Russell vyjádřil se sám o svých názorech takto: „Logika a mathematika nás nutí připustiti jakýsi druh realismu ve smyslu scholastickém, že totiž existuje svět universalií a pravd, které nejsou v přímém vztahu k té neb oné zvláštní existenci.“

Tato scholastická reminiscence realismu připomíná kontrastem středověký nominalismus; oba ty proudy dosud v mathematice trvají.

Ačkoliv Poincaré nemůže býti uváděn co představitel mathematického nominalismu, přece jeho názory mají nominalistický nádech. Tak často opakovaný požadavek, aby všecky vědecké objekty byly definovatelny *konečným počtem slov*, připomíná středověké these nominalistické, dle nichž *obecné pojmy* nemají větší existenci než slova, jimiž jsou vyjádřeny, takže na konec převádějí se jen na pouhé zvuky *flatus vocis*.

Řešení algebraické rovnice výrazy meznými.

Napsal **M. Kössler.**

Bernoulli-ho methoda řešení algebraické rovnice vyjadřuje největší co do absolutní hodnoty kořen jako limitu, ku které konverguje řada čísel

$$\frac{s_1}{s_0}, \frac{s_2}{s_1}, \frac{s_3}{s_2}, \ldots, \frac{s_{k+1}}{s_k}, \ldots, \qquad (a)$$

kdež jest

$$s_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k + \ldots + \alpha_n^k$$

a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ jsou kořeny rovnice.

Řešení toto můžeme pokládati do jisté míry za obecné, protože čísla s_k dovedeme vypočísti jako funkce obecných koeficientů rovnice a řada (a) definuje tedy, má-li ovšem limitu jistou funkci těchto obecných koeficientů.

Přirozeně naskýtá se otázka, zda a za jakých okolností bylo by možno rozšířiti tuto methodu tak, aby nám dovolovala vyjádřiti současně *všechny* kořeny rovnice n-tého stupně jako limity řád obdobných řadě (a), to jest vyjádřiti je jako funkce obecných koeficientů rovnice.

Pro jistý typ rovnic řešen jest problem tento v řádcích následujících. K typu onomu patří na př. všechny rovnice, které mají jen reálné kořeny.

Výsledek shrnutý ve vzorcích $(10a)$ a (11) ukazuje, že pomocí čísel s_k můžeme vyjádřiti všechny kořeny jako limity řad obdobných řadě (a).
