Rudolf Hruša

Příspěvek ku geometrii čtyřúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 2, 230--233

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121405

Příspěvek ku geometrii čtyřúhelníku.

Napsal **Rudolf Hruša**, c. k. professor.

Budiž dán různoběžník vypuklý $ABCD$, jehož strany od vrcholu D počínajíc buďtež a, b, c, d, vnitřní úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a úhlopříčny u, v, úhel jimi sevřený budiž ω. Plocha uvažovaného různoběžníku dá se rozličným způsobem vyjádřiti 5 ze jmenovaných veličin. [Strnad, Geometrie pro vyšší školy reálné 3. vyd., díl II., str. 85, 86. Vojtěch, Geometrie pro VI. tř. reálek, str. 106. Bydžovský-Vojtěch, Sbírka úloh z mathematiky pro vyšší třídy středních škol. Str. 272.]

Uvádím zde formule, v nichž plocha P jest vyjádřena dvěma protilehlými stranami a vnitřními úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, jež zní [Bydžovský-Vojtěch, Sbírka úloh, str. 272]:

$$P = \frac{a^2 \sin\alpha \sin\beta - c^2 \sin\gamma \sin\delta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \tag{1}$$

$$P = \frac{d^2 \sin\delta \sin\alpha - b^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin(\alpha + \delta)} \tag{2}$$

Jako doplněk uvádím třetí formuli, v níž místo dvou stran zastupují úhlopříčny u, v a sice:

$$P = \frac{u^2 \sin\alpha \sin\gamma - v^2 \sin\beta \sin\delta}{2 \sin(\alpha + \gamma)} \tag{3}$$

K formuli té jsem dospěl pochodem početním, jejž tuto uvádím.

Budiž F průsek prodloužených stran AD, BC. Z $\triangle\, ACF$, $\triangle\, BDF$ užitím věty Carnotovy plynou tyto vztahy:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FC}^2 + 2\overline{AF}\,.\,\overline{FC} \cos(\alpha + \beta) \tag{a}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{BF}^2 + 2\overline{DF}\,.\,\overline{BF} \cos(\alpha + \beta). \tag{b}$$

Zbývá pouze vyjádřiti úsečky $\overline{AF}, \overline{FC}, \overline{DF}, \overline{BF}$ stranami čtyřúhelníku a, c; to se stane užitím věty sinusové na $\triangle\, ABF$, $\triangle\, DCF$, čímž dospěji k řadě úměr:

$$\overline{AF} : \overline{AB} = \sin\beta : \sin(\alpha + \beta)$$
$$\overline{BF} : \overline{AB} = \sin\alpha : \sin(\alpha + \beta)$$
$$\overline{DF} : \overline{DC} = \sin\gamma : \sin(\alpha + \beta)$$
$$\overline{CF} : \overline{DC} = \sin\delta : \sin(\alpha + \beta).$$

Zavedením stručného označení:

$$\overline{AC} = u,\ \overline{BD} = v$$
$$\overline{AB} = a,\ \overline{CD} = c$$

přejdou rovnice (a), (b) po malé úpravě ve tvar

$$u^2 \sin^2 (\alpha + \beta) = a^2 \sin^2 \beta + c^2 \sin^2 \delta$$
$$+ 2ac \sin \delta \sin \beta \cos (\alpha + \beta) \qquad (4)$$
$$v^2 \sin^2 (\alpha + \beta) = c^2 \sin^2 \gamma + a^2 \sin^2 \alpha$$
$$+ 2ac \sin \alpha \sin \gamma \cos (\alpha + \beta). \qquad (5)$$

Odečte-li se rovnice (5) znásobená součinem $\sin \beta \sin \delta$, od rovnice (4) znásobené součinem $\sin \alpha \sin \gamma$, vyjde postupně:

$$[u^2 \sin \alpha \sin \gamma - v^2 \sin \beta \sin \delta] \sin^2 (\alpha + \beta)$$
$$= a^2 \sin \alpha \sin \beta [\sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \delta]$$
$$+ c^2 \sin \gamma \sin \delta [\sin \alpha \sin \delta - \sin \beta \sin \gamma],$$
$$[u^2 \sin \alpha \sin \gamma - v^2 \sin \beta \sin \delta] \sin^2 (\alpha + \beta)$$
$$= (a^2 \sin \alpha \sin \beta - c^2 \sin \gamma \sin \delta) (\sin \beta \sin \gamma$$
$$- \sin \alpha \sin \delta).$$

Odtud plyne formule:

$$\frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta - c^2 \sin \gamma \sin \delta}{\sin (\alpha + \beta)}$$
$$= \frac{(u^2 \sin \alpha \sin \gamma - v^2 \sin \beta \sin \delta) \sin (\alpha + \beta)}{\sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \delta}.$$

Levá strana nadepsané rovnice jest, jak formule (1) ukazuje, dvojnásobná plocha různoběžníku; odtud plyne vztah:

$$P = \frac{(u^2 \sin \alpha \sin \gamma - v^2 \sin \beta \sin \delta) \sin (\alpha + \beta)}{2 (\sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \delta)}.$$

Jmenovatel pravé strany dá se upraviti; dle poučky součtové obdrží se předem:

$$2 \sin \beta \sin \gamma - 2 \sin \alpha \sin \delta = \cos (\beta - \gamma) - \cos (\beta + \gamma)$$
$$+ \cos (\alpha + \delta) - \cos (\alpha - \delta).$$

Vzhledem k tomu, že

$$\beta + \gamma = 360 - (\alpha + \delta),$$

a tudíž

$$\cos (\beta + \gamma) = \cos (\alpha + \delta)$$

plyne dále vztah:

$$2\,(\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\delta) = \cos(\beta-\gamma) - \cos(\alpha-\delta).$$

Použitím formule:

$$\cos\varphi - \cos\psi = 2\sin\frac{\psi+\varphi}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}$$

obdrží se postupně:

$$2\,(\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\delta)$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{2}$$

$$2\,(\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\delta) = \sin(\gamma+\delta)\sin(\beta+\delta)$$
$$= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma).$$

Poslední vztah odůvodňují relace:

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta = 360 - 2\,(\gamma+\delta),$$
$$\alpha-\beta+\gamma-\delta = 360 - 2\,(\beta+\gamma).$$

Plocha čtyřúhelníku je dána tudíž vztahem:

$$P = \frac{u^2\sin\alpha\sin\gamma - v^2\sin\beta\sin\delta}{2\sin(\alpha+\gamma)}. \tag{3}$$

Ze stanoviska algebry jest složení formulí (1), (2), (3) stejné. Z formule (1) plyne druhá záměnou stran a, c za b, d a úhlu β za δ; z téže formule plyne třetí záměnou stran za úhlopříčny a úhlu β s úhlem γ.

Čtyřúhelník, jehož dvě protilehlé strany jsou u, v, a úhly k těmto resp. přilehlé $\begin{matrix}\alpha, \gamma\\ \beta, \delta\end{matrix}$ má plochu stejně velikou jako čtyřúhelník $ABCD$. Evidentní je ten výrok na př. u rovnoběžníku.

V lichoběžníku, kde mezi vnitřními úhly α, β, γ, δ existují vztahy: $\alpha + \delta = 180^0$, $\beta + \gamma = 180^0$, nabudou formule (1) a (3) jednoduššího tvaru a sice:

$$L = \frac{(a^2 - c^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} \tag{1a}$$

$$L = \frac{(u^2 - v^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\beta-\alpha)}. \tag{3a}$$

Formule (2) vede k výsledku $\frac{0}{0}$, což nepřekvapí, uváží-li se, že dvěma různoběžnými stranami b, d a úhly α, β není dokonale lichoběžník stanoven, poněvadž mezi těmi prvky existuje závislost ve tvaru úměry:

$$d : b = \sin \beta : \sin \alpha.$$

Podobně u tětivového čtyřúhelníku formule (3) vede k výsledku $\frac{0}{0}$ a sice z toho důvodu, že dvěma úhlopříčnami u, v a dvěma sousedními vnitřními úhly α, β není tento dokonale stanoven. Mezi uvedenými prvky existuje totiž vztah:

$$u : v = \sin \beta : \sin \alpha.$$

Rovnice (4) a (5) mají značnou důležitost pro řešení různoběžníku, dány-li délky obou úhlopříčen a vnitřní úhly.

Obě rovnice obsahují pouze dvě neznámé strany a, c a jsou tvaru kanonického a 2. stupně. Známým způsobem vede ta úloha na kvadratickou rovnici vzhledem k proměnné

$$t = \frac{a}{c},$$

načež odmocňováním, dělením a násobením se určí strany a, c.

Rovnice ty vedou k poznatku, že uvedená dříve úloha jest početně a konstruktivně řešitelná. Zajímavé konstruktivní řešení najde čtenář ve spisu: Alexandroff-Aitoff, Problèmes de géométrie élémentaire etc. Paříž 1899. Préface du traducteur p. VIII. Tamtéž překladatel praví, že řešení algebraické jest složité. Jest zajímavo, zda řešení to bylo již někde uveřejněno.

Formule (1) a (2) dají se jednoduše geometrickým názorem odvoditi. Dá se to provésti s formulí (3) rovněž tak? Byla ta formule již uveřejněna?

Drobnosti mathematické.

Podává škol. rada **Václav Hübner**, Král. Vinohrady.

I. Řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2$$

racionálními čísly celými lze převésti na řešení trojúhelníku pravoúhlého, aby jeho všechny strany vyhovovaly dané podmínce. Vyšetřování těchto čísel zakládá se na této úvaze: Je-li $tg \frac{\beta}{2}$ číslo racionální, jest $\sin \beta$ a $\cos \beta$ vždy racionální.