Václav Jeřábek

Poznámka k článku "O jisté vlastnosti kuželoseček"

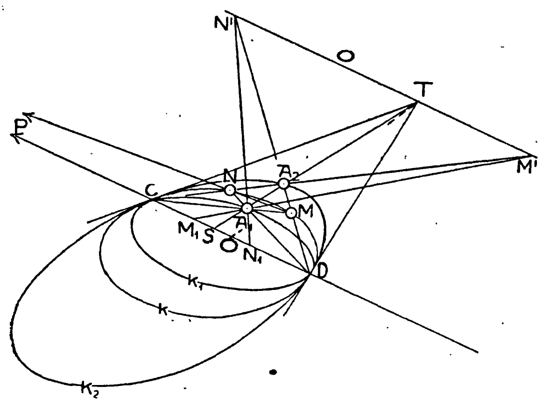
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 2, 225--229

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121402

Poznámka k článku „O jisté vlastnosti kuželoseček“.

Napsal **V. Jeřábek.**

V předchozím ročníku tohoto časopisu v článku *„O jisté vlastnosti kuželoseček“* (str. 494) zevšeobecnil pan prof. Dr. *Pleskot* větu, na kterou dovolil jsem si upozorniti čtenáře Časopisu článkem *„Parametrická vlastnost kuželoseček“*. (Roč. 41., str. 229 a roč. 42., str. 217.)



Obr. 1.

Zobecnění řečené jest toto: *Jsou dány dvě kuželosečky* k, k_1, *jež se dotýkají v bodech* C, D *(obr. 1.). Kterýkoliv bod* A_1 *kuželosečky* k_1 *promítněme z bodů* C, D, *resp. do bodů* M, N *na kuželosečku* k; *veďme pak průsečíkem* T *společných tečen rovnoběžku o s* CD *čili poláru středu* O *tětivy* CD. *Tuto poláru protne přímka* CN *v bodě* M' *a přímka* DM

v bodě N', a tu platí věta: Přímky $M'A_1$, NA_1 vytínají na CD úsečku M_1N_1 stálé délky.

Větu tuto v užším smyslu zobecněnou dokázal pan Pleskot napřed analyticky o kuželosečkách k, k_1 (obr. 2. a 3.), jež se v koncových bodech společné osy CD dotýkají, tak že $A_1M_1 \parallel NC$, $A_1N_1 \parallel MD$; a pak ji centr. kollineací ve znění svrchu uvedeném rozšířil.

Přímo a geometricky lze větu rozšířenou dokázati takto:

Paprsky CA_1, DA_1 projektivných svazků $C(A_1\ldots)$, $D(A_1\ldots)$ (obr. 1.) stanoví na kuželosečce k projektivné řady bodové $(M\ldots)$, $(N\ldots)$, které promítají se z bodů D, C projektivnými svazky $D(M\ldots)$, $C(N\ldots)$, jejichž výtvarem je kuželosečka k_2 jakožto geom. místo bodu A_2, v němž se paprsky DM a CN sekou. Kuželosečka tato dotýká se kuželoseček k, k_1 v bodech C, D; neboť společnému paprsku CD zmíněných svazků příslušejí paprsky CT, DT dotýkající se též kuželosečky k_2 v bodech C, D. Ježto čtyřúhelník $CDMN$ je kuželosečce k vepsán, protínají se jeho protilehlé strany CD a MN v bodě P, který je pólem přímky A_1A_2 spojující průsečíky $A_1 \equiv (\overline{CM}, \overline{DN})$, $A_2 \equiv (\overline{CN}, \overline{DM})$ druhých dvou párů protilehlých stran Z toho pak, že P leží na poláře CD bodu T, soudíme, že spojnice $\overline{A_1A_2}$ prochází pólem T. Buď S průsečíkem přímek A_1A_2 a CD. Kuželosečky k_1, k_2 jsou v centr. kollineaci dle osy CD a středu T, pročež dělí spojnici homologických bodů A_1, A_2 osa CD a střed T dle stálého dvojpoměru

$$\frac{SA_1}{TA_1} : \frac{SA_2}{TA_2} = k.$$

Z trojúhelníků podobných $A_1M_1N_1$, $AM'N'$ plyne

$$\frac{M_1N_1}{M'N'} = \frac{SA_1}{TA_1},$$

a v trojúhelnících podobných A_2CD, $A_2M'N'$ jest

$$\frac{CD}{M'N'} = \frac{SA_2}{TA_2};$$

dělením těchto úměr bude

$$\frac{M_1N_1}{CD} = \frac{SA_1}{TA_1} : \frac{SA_2}{TA_2} = k,$$

čili

$$\overline{M_1N_1} = k\overline{CD}.$$

V rovnici této je k hodnoty stálé a též délka $\overline{CD}$ konstantní, pročež je též úsečka M_1N_1 délky stálé a nezávislé na poloze bodu A_1 v kuželosečce k_1.

Je-li $\overline{CD} = 2a_1$ společnou osou (průměrem) kuželoseček k, k_1, je též CD osou (průměrem) kuželosečky k_2. Druhé poloosy (průměry sdružené) buďtež (obr. 2. a 3.)
$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$, $\overline{OB}_1 = -\overline{OB'}_1 = b_1$, $\overline{OB}_2 = -\overline{OB'}_2 = b_2$.
V tomto případě jsou A_1, A_2 homologickými body a CD osou affinních soustav Σ_1, Σ_2, v nichž kuželosečka k_2 je affinně přidružena ku k_1. Homologickými body soustav Σ_1, Σ_2 jsou též body B_1, B_2 (obr. 2.), jsou-li k, k_1, k_2 ellipsy, anebo B_1, B'_2, jsou-li k_1, k_2 ellipsy a k hyperbolou (sestrojení ponechává se čtenáři). Neboť přijde-li A_1 po k_1 do B_1 (obr. 2.), přijde též A_2 po k_2 do B_2 nebo B'_2. Jsou-li však k_1, k_2 hyperboly a k ellipsa (obr. 3.). nebo k, k_1, k_2. hyperboly (sestrojení zůstaveno čtenáři), pak jsou v prvním případě B_1, B'_2 a v druhém B_1, B_2 body homologickými. To vysvítá z toho, že jsou v prvním případě hom. přímkami spojnice CB_1, CB'_2 a v druhém CB_1, CB_2, protože jsou rovnoběžny s příslušnými homologickými asymptotami u_1, u_2 hyperbol k_1, k_2; protínají tudíž spojnice řečené směr affinity OB v bodech homologických — jak jsme tvrdili.

Podobné trojúhelníky $A_1M_1N_1$, A_2CD dávají úměru

$$\frac{M_1N_1}{CD} = \frac{SA_1}{SA_2},$$

a že

$$\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = +\frac{b_1}{b_2} \text{ (obr. 2.)}, \quad \Bigg| \quad \frac{SA_1}{SA_2} = \frac{OB_1}{OB'_2} = -\frac{b_1}{b_2} \text{ (obr. 3.)},$$

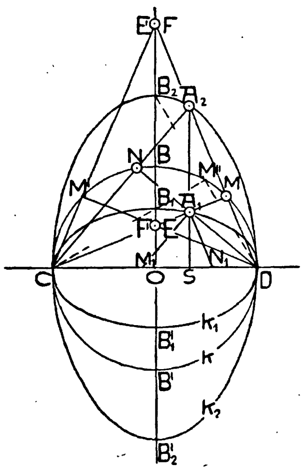
je též

$$\frac{M_1N_1}{CD} = \pm\frac{b_1}{b_2},$$

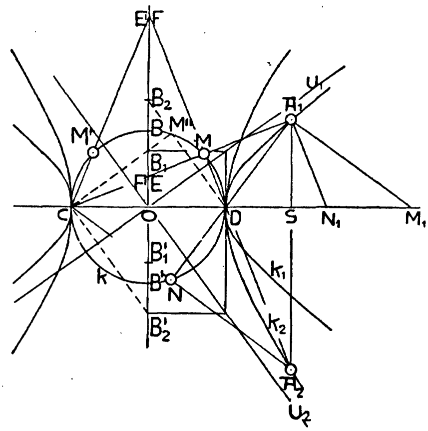
kdež platí hořejší nebo dolejší znaménko dle toho, jsou-li SA_1, SA_2 směru stejného (obr. 2.) nebo protivného (obr. 3.).

Pohybuje-li se bod M po kuželosečce k, stanoví projektivně sdružené paprsky CM, DM svazků $C(M \ldots)$, $D(M \ldots)$ na OB projektivné řady $(E \ldots)$, $(F \ldots)$, které jsou v involuci, neboť počítáme-li bod E k řadě druhé $(F \ldots)$, značíce jej

F', pak paprsek DF' stanoví na k bod M' souměrný k bodu M dle osy OB, tak že paprsek CM' souměrný k paprsku DM dle OB určuje v řadě prvé (E . . .) bod E' splývající s bodem F Je-li k ellipsou (obr. 2. a 3.) a přijde-li bod M do bodu B, sjednotí se s ním též body E, F, pročež je B jedním samodružným bodem involuce a O jejím středem. Týmž způsobem lze dospěti k druhému samodružnému bodu B'. Je-li však k hyperbolou (sestrojení ponechává se čtenáři) a stane-li se M



Obr. 2.



Obr. 3.

jejím bodem úběžným jedním nebo druhým, sjednotí se bod E s bodem B a bod F s bodem B' anebo naopak; neboť paprsky v těchto mezních polohách, jsouce rovnoběžny s jednou nebo druhou asymptotou hyperboly k, procházejí resp. body B, B' nebo naopak. Jsou tedy B, B' jednou družinou involuce, jejíž bod centrálný půlí délku $\overline{BB'}$; samodružné body této involuce jsou imaginární.

Máme tedy, je-li k

1. ellipsou (obr. 2. a 3.),	2. hyperbolou (obr. není sestrojen),
$\overline{OE} . \overline{OF} = \overline{OB}^2 = + b^2$	$\overline{OE} . \overline{OF} = \overline{OB} . \overline{OB}' = - b^2$.

Je tedy v prvním případě potence b^2 kladná, v druhém záporná $- b^2$.

Předpokládejme nyní, že k je ellipsou, a buďtež k_1, k_2

a) ellipsy (obr. 2.).

Přijde-li bod M po kuželosečce k do bodu M'', v němž ji CB_1 po druhé seče, splynou body A_1, A_2 a též i body E, F resp. s body B_1, B_2, které nám podávají jednu družinu involuce o středu O a potenci b^2.

b) hyperboly (obr. 8.).

Přijde-li bod M po kuželosečce k do bodu M'', v němž ji CB_1 po druhé seče, stanou se A_1, A_2 úběžnými body hyperbol k_1, k_2, pročež je spojnice CM'' rovnoběžna s asymptotou u_1 a spojnice DM'' s asymptotou u_2. Prochází tudíž DM'' bodem B_2. Splynou tedy body E, F resp. s body B_1, B_2, které nám podávají jednu družinu involuce o středu O a potenci b^2.

Je tedy v případech *a*), *b*)

$$OB_1 \,.\, OB_2 = b^2,$$

čili

$$b_1 \,.\, b_2 = b^2.$$

Obdobně lze k témuž výsledku dospěti, značí-li b^2 číslo záporné, a je li k hyperbolou.

Dříve jsme obdrželi

$$\frac{M_1N_1}{CD} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Vyloučíme li b_2 z posledních dvou rovnic, bude

$$\frac{M_1N_1}{CD} = \frac{b_1^2}{b^2},$$

a znamenáme-li $CD = 2a_1$, dostaneme

$$M_1N_1 = \frac{2a_1b_1^2}{b^2}.$$

Je-li k kruhem, je $b = a_1$, pročež

$$M_1N_1 = \frac{2b_1^2}{a_1}$$

značí dvojnásobný parametr kuželosečky k_1.