Vojtěch Jarník
O mřížových bodech ve vícerozměrných koulích

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 291--296

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121393

O mřížových bodech ve vícerozměrných koulích.

Napsal *Vojtěch Jarník.*

§ 1. Úvod.

Buďtež v celém tomto pojednání x, k celistvá čísla kladná, $k \geqq 5$. Budiž $F_k(x)$ počet mřížových bodů uvnitř a na povrchu koule

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 = x; \tag{1}$$

položme

$$F_k(x) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k + 1)} x^{\frac{1}{2}k} + P_k(x) \tag{2}$$

($P_k(x)$ je tedy rozdíl mezi $F_k(x)$ a obsahem koule (1)). Nechme nyní vzrůstati x celými čísly do nekonečna; potom platí[1])

$$P_k(x) = O(x^{\frac{1}{2}k-1}),$$

čili

$$\limsup_{x=\infty} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}} < +\infty, \quad \liminf_{x=\infty} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}} > -\infty.$$

Naopak platí[2])

$$\limsup_{x=\infty} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}} > \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{2\Gamma(\frac{1}{2}k)}, \quad \liminf_{x=\infty} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}} < \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{2\Gamma(\frac{1}{2}k)}.$$

Pišme

$$M_k = \limsup_{x=\infty} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}}, \quad m_k = \liminf_{x=\infty} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}};$$

---

[1]) Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden; Math. Zeitschr. 19 (1924), str. 300—307; Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden; Math. Zeitschr. 21 (1924), str. 126—132; Petersson, Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden; Abhandl. aus dem math. Seminar in Hamburg 5 (1927), str. 116 až 150. Ve všech těchto pojednáních jest vyšetřována obecná positivní definitní kvadratická forma s racionálními koeficienty místo speciální formy $u_1^2 + \ldots + u_k^2$.

[2]) Petersson, l. c. 1; pro případ obecné positivní definitní kvadratické formy s racionálními koeficienty viz dvě pojednání autorova v Math. Zeitschr.: Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden; Math. Zeitschr. 27 (1927), str. 154—160; druhé pojednání v tisku.

účelem tohoto pojednání jest, určiti průběh čísel M_k a m_k při rostoucím k. Výsledek jest dán touto větou:[3])

Věta 1.

$$\left.\begin{aligned} M_k &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\vartheta_k}{2^{\frac{1}{2}k}}+O\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}k}}\right)\right) \\ m_k &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)}\left(\tfrac{1}{2}-\frac{\vartheta_k}{2^{\frac{1}{2}k}}+O\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}k}}\right)\right); \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

při tom jest

$$\vartheta_k = 1 \text{ pro } k \equiv 0 \pmod 2, \quad \vartheta_k = \sqrt{2} \text{ pro } k \equiv 1 \pmod 2. \tag{4}$$

Místo věty 1 dokážeme následující větu, jež dává o průběhu funkce $P_k(x)$ výsledky ještě přesnější:

Věta 2. *Položme* pro $l = 0, 1, 2, 3$

$$M_{k,l} = \limsup_{\substack{x \equiv l \pmod 4 \\ x=\infty}} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}}, \quad m_{k,l} = \liminf_{\substack{x \equiv l \pmod 4 \\ x=\infty}} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}};$$

potom jest

$$\left.\begin{aligned} M_{k,l} &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{r_{k,l}\vartheta_k}{2^{\frac{1}{2}k}}+O\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}k}}\right)\right) \\ m_{k,l} &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{r_{k,l}\vartheta_k}{2^{\frac{1}{2}k}}+O\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}k}}\right)\right), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

kdež

$$\left.\begin{aligned} & r_{k,0} = r_{k,1} = -r_{k,2} = -r_{k,3} = (-1)^{\frac{1}{4}k} \text{ pro } k \equiv 0 \pmod 4; \\ & r_{k,0} = r_{k,2} = 0, \; r_{k,1} = -r_{k,3} = (-1)^{\frac{1}{4}(k-1)} \text{ pro } k \equiv 1 \pmod 4; \\ & r_{k,0} = -r_{k,1} = -r_{k,2} = r_{k,3} = (-1)^{\frac{1}{4}(k+2)} \text{ pro } k \equiv 2 \pmod 4; \\ & r_{k,0} = -r_{k,2} = (-1)^{\frac{1}{4}(k+1)}, \; r_{k,1} = r_{k,3} = 0 \text{ pro } k \equiv 3 \pmod 4. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Z věty 2 plyne věta 1; neboť, platí-li věta 2, jest

$$M_k = \max_{l=0,1,2,3} M_{k,l} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\vartheta_k}{2^{\frac{1}{2}k}}+O\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}k}}\right)\right),$$

$$m_k = \min_{l=0,1,2,3} m_{k,l} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)}\left(\tfrac{1}{2}-\frac{\vartheta_k}{2^{\frac{1}{2}k}}+O\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}k}}\right)\right).$$

§ 2. Důkaz věty 2.

Abychom dokázali větu 2, stačí patrně dokázati následující:

Existuje číslo k_0 takové, že pro každé $k > k_0$ lze nalézti číslo $x_0 = x_0(k)$ tak, že platí

---

[3]) Znamení O vztahuje se ve znění věty 1. a 2. k rostoucímu k; v celé ostatní práci vztahuje se toto znamení k rostoucímu x při pevném k.

$$\left| P_k(x) - \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)} x^{\frac{1}{2}k-1} \left(\tfrac{1}{2} + \frac{r_{k,l}\,\vartheta_k}{2^{\frac{1}{2}k}} \right) \right| < \frac{8\,\pi^{\frac{1}{2}k}}{3^{\frac{1}{2}k}\,\Gamma(\frac{1}{2}k)} x^{\frac{1}{2}k-1} \tag{7}$$

pro všechna celistvá $x > x_0$, *pro něž*

$$x \equiv l \pmod 4 \qquad (l = 0, 1, 2, 3).$$

Důkaz. Ze známé formule Hardyovy plyne okamžitě[4])

$$F_k(x) =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)} \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{1}{2}k-1} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)} \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \left(\frac{S_{p,q}}{q} \right)^k \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{1}{2}k-1} e^{-\frac{2\pi inp}{q}} + O(x^{\frac{1}{4}k+1}); \tag{8}$$

při tom se podle p sčítá pouze přes čísla nesoudělná s q; $S_{p,q}$ jest Gaussův součet

$$S_{p,q} = \sum_{m=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i m^2 p}{q}}.$$

Platí, jak známo:

$$\left.\begin{aligned} &|S_{p,q}| = \varepsilon \sqrt{q}, \ \text{kde} \ \varepsilon = 1 \ \text{pro} \ q \equiv 1 \pmod 2, \\ &\varepsilon = \sqrt{2} \ \text{pro} \ q \equiv 0 \pmod 4, \ \varepsilon = 0 \ \text{pro} \ q \equiv 2 \pmod 4. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

V důsledku toho je řada na pravé straně rovnice (8) absolutně konvergentní.

Pro $q \geqq 2$ $(0 < p < q;\ p, q$ celistvá a nesoudělná), $m \geqq 1$ jest

$$\left| \sum_{n=0}^{m} e^{-\frac{2\pi inp}{q}} \right| \leqq \frac{1}{\sin(\pi p/q)} \leqq \tfrac{1}{2} \operatorname{Max} \left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p} \right) = \frac{r}{2}$$

a tedy částečnou sumací

$$\left| \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{1}{2}k-1} e^{-\frac{2\pi inp}{q}} \right| \leqq \frac{r}{2} \sum_{n=0}^{x-1} \left((n+1)^{\frac{1}{2}k-1} - n^{\frac{1}{2}k-1} \right) + \frac{r}{2} x^{\frac{1}{2}k-1} = r x^{\frac{1}{2}k-1}. \tag{10}$$

Jest tedy především

$$\left| \sum_{p=1}^{2}{}' \left(\frac{S_{p,3}}{3} \right)^k \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{1}{2}k-1} e^{-\frac{2\pi inp}{3}} \right| \leqq \sum_{p=1}^{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^k r x^{\frac{1}{2}k-1} = \frac{6}{3^{\frac{1}{2}k}} x^{\frac{1}{2}k-1}. \tag{11}$$

Dále jest podle (9) a (10)

$$\left.\begin{aligned} &\left| \sum_{q=5}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \left(\frac{S_{p,q}}{q} \right)^k \sum_{n=0}^{x} n^{\frac{1}{2}k-1} e^{-\frac{2\pi inp}{q}} \right| \leqq \\ &\leqq \Bigg(\sum_{\substack{q=5 \\ q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{r}{q^{\frac{1}{2}k}} + \sum_{\substack{q=8 \\ q \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4)}}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{r\, 2^{\frac{1}{2}k}}{q^{\frac{1}{2}k}} \Bigg) x^{\frac{1}{2}k-1}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

---

[4]) Hardy, On the representation of a number as the sum of any number of squares and in particular of five; Transactions of the Amer. Math. Soc. 21 (1920), str. 255—284; viz též Walfisz, l. c. 1, vzorec (10).

Ježto $\sum_{p=0}^{q-1}{}' r \leq 2\left(\frac{q}{1}+\frac{q}{2}+\ldots+\frac{q}{q}\right) < 2q\,(1+\log q)$, jest pravá strana v (12) menší než

$$\left(\sum_{q=5}^{\infty}\frac{2q\,(1+\log q)}{q^{\frac{1}{2}k}}+\sum_{q=4}^{\infty}\frac{2\,.\,2q\,(1+\log 2q)}{q^{\frac{1}{2}k}}\right)x^{\frac{1}{2}k-1}<$$

$$<6\sum_{q=4}^{\infty}\frac{1+\log 2q}{q^{\frac{1}{2}k-1}}\,x^{\frac{1}{2}k-1}.$$

Jest však pro $s > 1$

$$\sum_{q=4}^{\infty}\frac{1+\log 2q}{q^{s}}=\frac{1}{4^{s}}\left(1+\log 8+\sum_{q=5}^{\infty}\frac{1+\log 2q}{(\frac{1}{4}q)^{s}}\right);$$

ježto očividně

$$\lim_{s=\infty}\sum_{q=5}^{\infty}\frac{1+\log 2q}{(\frac{1}{4}q)^{s}}=0,$$

platí pro $k > k_1$, kde k_1 je vhodné číslo kladné,

$$\sum_{q=4}^{\infty}\frac{1+\log 2q}{q^{\frac{1}{2}k-1}}<\frac{1}{4^{\frac{1}{2}k-1}}(1+\log 8+1)<\frac{5}{4^{\frac{1}{2}k-1}}.$$

Pro $k > \max(5, k_1)$ je tedy

$$\left|\sum_{q=5}^{\infty}\sum_{p=0}^{q-1}{}'\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^{k}\sum_{n=0}^{x}n^{\frac{1}{2}k-1}e^{-\frac{2\pi inp}{q}}\right|<\frac{30}{4^{\frac{1}{2}k-1}}\,x^{\frac{1}{2}k-1}. \tag{13}$$

Podle Eulerovy sumační formule platí[5])

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{x}n^{\frac{1}{2}k-1}=\tfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}k-1}+\int_{0}^{x}u^{\frac{1}{2}k-1}\,du+\\&+(\tfrac{1}{2}k-1)\int_{0}^{x}\chi(u)u^{\frac{1}{2}k-2}\,du=2k^{-1}\,x^{\frac{1}{2}k}+\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}k-1}+O(x^{\frac{1}{2}k-2}).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Konečně jest

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{p=0}^{3}{}'\left(\frac{S_{p,4}}{4}\right)^{k}\sum_{n=0}^{x}n^{\frac{1}{2}k-1}e^{-\frac{2\pi inp}{4}}=\\&=\left(\frac{1+i}{2}\right)^{k}\sum_{n=0}^{x}n^{\frac{1}{2}k-1}e^{-\frac{\pi ni}{2}}+\left(\frac{1-i}{2}\right)^{k}\sum_{n=0}^{x}n^{\frac{1}{2}k-1}e^{\frac{\pi ni}{2}}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Položme $x = 4m + l$ (m celé, $l = 0, 1, 2, 3$).

Potom jest (dolní znamení odpovídají dolním a horní horním)

---

[5]) $\chi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$ pro necelé u, $\chi(u) = 0$ pro celé u.

$$\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{1}{2}k-1} e^{\mp\frac{\pi n i}{2}} = \sum_{t=0}^{m} (4t)^{\frac{1}{2}k-1} \mp i \sum_{t=0}^{m-1} (4t+1)^{\frac{1}{2}k-1} -$$
$$- \sum_{t=0}^{m-1} (4t+2)^{\frac{1}{2}k-1} \pm i \sum_{t=0}^{m-1} (4t+3)^{\frac{1}{2}k-1} +$$
$$+ \delta_1 (4m+1)^{\frac{1}{2}k-1} + \delta_2 (4m+2)^{\frac{1}{2}k-1} + \delta_3 (4m+3)^{\frac{1}{2}k-1};$$

při tom jest

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = 0 \text{ pro } l = 0;\ \delta_1 = \mp i \text{ pro } l = 1, 2, 3 \\ \delta_2 = 0 \text{ pro } l = 0, 1;\ \delta_2 = -1 \text{ pro } l = 2, 3 \\ \delta_3 = 0 \text{ pro } l = 0, 1, 2;\ \delta_3 = \pm i \text{ pro } l = 3. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Ale

$$(4t+2)^{\frac{1}{2}k-1} - (4t)^{\frac{1}{2}k-1} = 2(\tfrac{1}{2}k-1)(4t)^{\frac{1}{2}k-2} + O(t^{\frac{1}{2}k-3}),$$
$$(4t+3)^{\frac{1}{2}k-1} - (4t+1)^{\frac{1}{2}k-1} = 2(\tfrac{1}{2}k-1)(4t+1)^{\frac{1}{2}k-2} + O(t^{\frac{1}{2}k-3});$$

tedy jest

$$\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{1}{2}k-1} e^{\mp\frac{\pi n i}{2}} = 2(\tfrac{1}{2}k-1) \sum_{t=0}^{m-1} (-(4t)^{\frac{1}{2}k-2} \pm i(4t+1)^{\frac{1}{2}k-2}) +$$
$$+ (1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3)\, x^{\frac{1}{2}k-1} + O(x^{\frac{1}{2}k-2}) =$$
$$= \left(\frac{-1 \pm i}{2} + 1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3\right) x^{\frac{1}{2}k-1} + O(x^{\frac{1}{2}k-2}).$$

Dosadíme-li za δ_1, δ_2, δ_3 jejich hodnoty podle (16), zjistíme snadno, že

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^k \displaystyle\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{1}{2}k-1} e^{-\frac{\pi n i}{2}} + \left(\dfrac{1-i}{2}\right)^k \displaystyle\sum_{n=0}^{x} n^{\frac{1}{2}k-1} e^{\frac{\pi n i}{2}} = \\ \qquad = \dfrac{r_{k,l}\,\vartheta_k}{2^{\frac{1}{2}k}} x^{\frac{1}{2}k-1} + O(x^{\frac{1}{2}k-2}). \end{array}\right\} \tag{17}$$

Podle (8), (11), (13), (14), (15), (17), (2) jest tedy — ježto $S_{p,2} \mp 0$ — pro $k > \max(5, k_1)$

$$\left.\begin{array}{l} \left| P_k(x) - \dfrac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)} \left(\tfrac{1}{2} + \dfrac{r_{k,l}\,\vartheta_k}{2^{\frac{1}{2}k}}\right) x^{\frac{1}{2}k-1} \right| < \\ < \dfrac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)} \left(6 \cdot \dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}k}} + \dfrac{30 \cdot 4}{4^{\frac{1}{2}k}}\right) . x^{\frac{1}{2}k-1} + O(x^{\frac{1}{2}k-2}) + O(x^{\frac{1}{4}k+1}). \end{array}\right\} \tag{18}$$

Pro $k > k_2$ jest

$$\frac{120}{4^{\frac{1}{2}k}} < \frac{1}{3^{\frac{1}{2}k}},\ \tfrac{1}{4}k + 1 < \tfrac{1}{2}k - 1.$$

Ke každému $k > \max(5, k_1, k_2) = k_0$ lze pak očividně nalézti

$x_0 = x_0(k)$ takové, že pro všechna $x > x_0$ je pravá strana v (18) menší než

$$\frac{8\,\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)\,3^{\frac{1}{2}k}}\,x^{\frac{1}{2}k-1}.$$

Tím je však dokázána nerovnost (7), a tedy i věta 2.

Poznámky.

1. Věta 2 udává průběh funkce $P_k(x)$ pro celistvá x; pro x necelá není třeba dalšího vyšetřování, ježto $F_k(x) = F_k([x])$ a tedy

$$P_k(x) = P_k([x]) + \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)}\,([x]^{\frac{1}{2}k} - x^{\frac{1}{2}k}).$$

2. Ve formuli (8) jsme se omezili při přesnějších odhadech na členy, odpovídající hodnotám $q = 1, 2, 3, 4$; kdybychom tyto přesnější odhady provedli pro více hodnot q, dostali bychom výsledky přesnější, než jsou věty zde dokázané.

*

Sur les points à coordonnées entières à l'intérieur des sphères à plusieurs dimensions.

(Extrait de l'article précédent.)

Soient x, k des nombres entiers, $k \geqq 5$, $x > 0$. Posons

$$P_k(x) = \sum_{u_1^2+u_2^2+\dots+u_k^2 \leqq x} 1 - \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)}\,x^{\frac{1}{2}k};$$

$$M_k = \limsup_{x=\infty} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}}, \quad m_k = \liminf_{x=\infty} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}}.$$

On sait que l'on a

$$-\infty < m_k < \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}k)} < M_k < +\infty.$$

Dans cette note, nous nous occupons des fonctions m_k, M_k pour des grandes valeurs de k. Le résultat est donné par les formules (3), (4). D'une manière plus précise, écrivons, pour $l = 0, 1, 2, 3$

$$M_{k,l} = \limsup_{\substack{x=\infty \\ x\equiv l \,(\mathrm{mod}\ 4)}} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}}, \quad m_{k,l} = \liminf_{\substack{x=\infty \\ x\equiv l \,(\mathrm{mod}\ 4)}} \frac{P_k(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}}.$$

Alors, on a les formules (5), (6).