Jaroslav Jarušek

Základní vzorec pro počet kovariantů binárních forem

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 297--300

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121390

Základní vzorec pro počet kovariantů binárních forem.

Dr. *Jaroslav Jarušek.*

Máme-li skupinu výrazů $A_{ijk} \ldots$, závislých na koeficientech $a_m, b_m, c_m, \ldots$ daných forem binárních a splňujících rovnice

$$\Delta_{21} A_{ijk} \ldots = \alpha_i A_{i-1,jk} \ldots + \alpha_j A_{i,j-1,k} \ldots + \alpha_k A_{ij,k-1} + \ldots \quad (1)$$

$$\Delta_{12} A_{ijk} \ldots = \beta_i A_{i+1,jk} \ldots + \beta_j A_{i,j+1,k} \ldots + \beta_k A_{ijk+1} \ldots + \ldots, \quad (2)$$

při čemž $\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \beta_i, \beta_j, \ldots$ jsou jisté konstanty, můžeme z těchto výrazů tvořiti semiinvarianty podobně jako ze součinů $a_i b_j c_k \ldots$.

Takové výrazy jsou na př. determinanty

$$\begin{vmatrix} a_i & b_j & c_k & \ldots \\ a_{i+1} & b_{j+1} & c_{k+1} & \ldots \\ a_{i+2} & b_{j+2} & c_{k+2} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

kde koeficienty $a, b, c, \ldots$ mohou býti různé nebo stejné, anebo součiny takových determinantů.

Výrazy $A_{ijk} \ldots$ nemusí býti na sobě nezávislé. Pak ale vedle skutečných semiinvariantů dostaneme invariantní identity jako je na př. výraz

$$T = |01|\,|023| - |02|\,|013| + |03|\,|012|,$$

při čemž

$$|ijk| = \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ a_{i+1} & a_{j+1} & a_{k+1} \\ a_{i+2} & a_{j+2} & a_{k+2} \end{vmatrix}, \qquad |ij| = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{vmatrix}.$$

Provedením operace Δ_{21} na jeho determinanty podle příslušné rovnice tvaru (1) shledáme, že splňuje rovnici $\Delta_{21} T = 0$. Při tom T je výraz identicky rovný nule, neboť jest to rozvedený determinant

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Všechny výrazy S splňující rovnici $\Delta_{21} S = 0$ budeme nazývati semiinvarianty. Pomocí (2) můžeme pak tvořiti další koeficienty kovariantů, příslušných k takovým semiinvariantům, ať už jsou to skutečné semiinvarianty, nebo invariantní identity.

Označíme-li počet všech různých[1]) výrazů $A_{ijk} \ldots$ stupně r a váhy w, příslušných k daným formám, výrazem (w, r) a počet výrazů S, lineárních v $A_{ijk} \ldots$, a splňujících rovnici $\Delta_{21} S = 0$ výrazem $[w, r]$, bude patrně počet těchto semiinvariantů S utvořených z výrazů $A_{ijk} \ldots$ dán rovnicí

$$[w, r] = (w, r) - (w - 1, r)$$

tak, jak to platí pro semiinvarianty ze součinů $a_j\, b_i\, c_k \ldots$. Pro semiinvarianty ze součinů $a_i\, b_j\, c_k \ldots$ byla tato věta dokázána různými autory. Dokážeme ji jiným způsobem.

Budiž G libovolný lineární výraz z $A_{ijk} \ldots$ váhy w a stupně r. Pokusme se vyjádřiti G pomocí koeficientů kovariantů daných forem. Výraz G splňuje rovnici $\Delta_{21}^{w+1} G = 0$ a jest tedy $\Delta_{21}^{w} G = A_0$ semiinvarian tváhy 0. Výraz

$$G - \frac{1}{w!} A_w = U,$$

při čemž A_w je $(w + 1)$-ní koeficient kovariantu s vedoucím koeficientem A_0, splňuje rovnici $\Delta_{21}^{w} U = 0$ a jest tedy

$$\Delta_{21}^{w-1} U = \Delta_{21}^{w-1} G - \frac{1}{1!} A_1 = B_0$$

semiinvariantem váhy 1. Podobně výraz

$$V = G - \frac{1}{w!} A_w - \frac{1}{(w-1)!} B_{w-1}$$

splňuje rovnici $\Delta_{21}^{w-1} V = 0$ a jest tedy

$$\Delta_{21}^{w-2} V = \Delta_{21}^{w-2} G - \frac{1}{2!} A_2 - \frac{1}{1!} B_1 = C_0$$

semiinvariant váhy 2. Takto postupujíce dospějeme konečně k semiinvariantu váhy w

$$G - \frac{1}{w!} A_w - \frac{1}{(w-1)!} B_{w-1} - \ldots - \frac{1}{1!} L_1 = M_0.$$

Tím jest G vyjádřeno v žádaném tvaru

$$G = \frac{1}{w!} A_w + \frac{1}{(w-1)!} B_{w-1} + \ldots + \frac{1}{1!} L_1 + M_0, \tag{3}$$

[1]) Za různé pokládáme ty výrazy, z nichž žádný se nedá složiti lineárně z ostatních, při čemž je nerozvádíme v polynomy v $a, b, \ldots$ V uvedeném výrazu T jsou tři různé výrazy $|01|\,|023|$, $|02|\,|013|$, $|03|\,|012|$, třebaže nejsou nezávislé.

při čemž
$$A_0 = \varDelta_{21}^w G$$
$$B_0 = \varDelta_{21}^{w-1} G - \frac{1}{1!} A_1$$
$$C_0 = \varDelta_{21}^{w-2} G - \frac{1}{2!} A_2 - \frac{1}{1!} B_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$M_0 = G - \frac{1}{w!} A_w - \frac{1}{(w-1)!} B_{w-1} - \dots - \frac{1}{1!} L_1.$$

Mohli bychom také $A_0, B_0, \dots, M_0$ vyjádřiti přímo pomocí G. Dostali bychom

$$B_0 = \varDelta_{21}^{w-1} G - \frac{1}{1\,.\,p} \varDelta_{12} \varDelta_{21}^w G$$
$$C_0 = \varDelta_{21}^{w-2} G - \frac{1}{1\,.\,(p-2)} \varDelta_{12} \varDelta_{21}^{w-1} G + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,(p-1)(p-2)} \varDelta_{12}^2 \varDelta_{21}^w G$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Při tom p je řád kovariantu s vedoucím koeficientem A_0, takže kovarianty příslušné k $B_0, C_0, \dots$ mají řády $p-2$, $p-4, \dots$

Utvořme co nejobecnější tvar výrazu na pravé straně (3). Za $A_0, B_0, C_0, \dots$ vezmeme lineární výrazy utvořené ze všech různých (v našem smyslu) semiinvariantů příslušné váhy s obecnými koeficienty. Bude tedy

$$G = A_w + B_{w-1} + C_{w-2} + \dots + M_0, \tag{4}$$

při čemž
$$A_w = \alpha' A'_w + \alpha'' A''_w + \dots$$
$$B_{w-1} = \beta' B'_{w-1} + \beta'' B''_{w-1} + \dots$$
$$C_{w-2} = \gamma' C'_{w-2} + \gamma'' C''_{w-2} + \dots$$

Při tom $A'_0, A''_0, \dots, B'_0, B''_0, \dots, C'_0, C''_0, \dots$ jsou různé semiinvarianty a $\alpha', \alpha'', \dots, \beta', \beta'', \dots, \gamma', \gamma'', \dots$ jsou konstanty. Všechny výrazy $A'_w, A''_w, \dots, B'_{w-1}, B''_{w-1}, \dots, C'_{w-2}, C''_{w-2}, \dots$ jsou lineárně neodvislé (v našem smyslu). Mezi $A_w, B_{w-1}, C_{w-2}, \dots$ nemůže existovati lineární relace, neboť z takové relace na př.

$$\beta B_{w-1} + \gamma C_{w-2} + \delta D_{w-3} = 0$$

provedením $(w-1)$, $(w-2)$, $(w-3)$-krát operace $\varDelta_{21}$ dostali bychom rovnice
$$\beta_0 B_0 = 0$$
$$\beta_1 B_1 + \gamma_0 C_0 = 0$$
$$\beta_2 B_2 + \gamma_1 C_1 + \delta_0 D_0 = 0$$

a odtud $B_0 = 0$, $C_0 = 0$, $D_0 = 0$. Také všechny koeficienty kovariantů téže váhy jsou lineárně neodvislé. Na př. z relace

$$\gamma' C'_k + \gamma'' C''_k + \dots = 0$$

by plynulo
$$\gamma' C'_0 + \gamma'' C''_0 + \dots = 0,$$

což není možné.

Dostaneme tedy tolik lineárně nezávislých výrazů G, kolik je lineárně neodvislých semiinvariantů všech vah od 0 až do w. Tudíž

$$(w, r) = [0, r] + [1, r] + \ldots + [w-1, r] + [w, r]. \tag{5}$$

Odečteme-li od této rovnice tutéž rovnici pro $w-1$, dostaneme

$$[w, r] = [w, r] - (w-1, r). \tag{6}$$

Může se státi, že existuje semiinvariant I_0, ale člen I_l, který by měl býti v (4) neexistuje, poněvadž l je větší než řád kovariantu s vedoucím členem I_0. Rovnice (5) platí tedy jen tehdy, když váha jest taková, že žádný z výrazů A_w, B_{w-1}, C_{w-2}, ... není rovný nule, t. j. když žádný z jejich indexů $w, w-1, w-2, \ldots$ není vyšší než řád příslušného kovariantu. Tato řada indexů se zmenšuje po jedné, kdežto řády příslušných kovariantů se zmenšují po dvou. Následkem toho, když w je takové, že vymizí některý člen v (4) na př. I_l, musí vymizeti také všechny následující členy $K_{l-1}, \ldots, M_0$, t. j. pro takovou váhu neexistují semiinvarianty. V takovém případě, jak je viděti z rovnice (4), dostaneme na pravé straně (4) buď 0 nebo záporné číslo. Můžeme tedy rovnici (6) ponechati i pro takovéto váhy; když vyjde na pravé straně (6) záporné číslo, položíme $[w, r] = 0$.

Formule fondamentale pour le nombre de covariants des formes binaires.

(Extrait de l'article précédent.)

Considérons un système d'expressions $A_{ijk} \ldots$, formées avec les coefficients $a_m, b_m, c_m, \ldots$ des formes binaires données et auxquelles on applique les opérations Δ_{21}, Δ_{12}, d'après les formules (1) et (2). On peut former, en partant des fonctions linéaires de $A_{ijk} \ldots$, des expressions S satisfaisant à l'équation $\Delta_{21} S = 0$, d'une manière analogue à celle par laquelle on les déduit des produits $a_i b_j c_k \ldots$ Il peut se trouver, outre les seminvariants effectifs, parmi les expressions S, encore des identités invariantes (des expressions qui sont nulles si l'on remplace les termes $A_{ijk} \ldots$ par leurs valeurs en $a_m, b_m, \ldots$). Si (w, r) est le nombre des expressions $A_{ijk} \ldots$ et (w, r) le nombre des expressions S du poids w et du degré r, l'équation

$$(w, r) = (w, r) - (w-1, r)$$

a lieu tout comme pour le nombre des seminvariants formés des produits $a_i b_j c_k \ldots$ Cette formule suit de ce que toute fonction linéaire en $A_{ijk} \ldots$ peut s'exprimer linéairement à l'aide des coefficients des covariants dont les expressions S sont les sources.