Bohumil Bydžovský
Příspěvek k teorii eliptické sextiky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 202--207

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121389`

Příspěvek k teorii eliptické sextiky.

Napsal *B. Bydžovský.*

1. V teorii sextik se dokazuje,[1]) že osm dvojnásobných bodů rovinné sextiky může býti voleno libovolně, že však devátý bod dvojnásobný takové křivky — jež pak je eliptická — nemůže býti vzat libovolně, nemá-li se křivka rozpadnouti, nýbrž že geometrické místo devátých bodů dvojnásobných při daných osmi je křivka stupně devátého K_9, mající daných osm bodů za trojnásobné a těmito body ovšem určená. Její tečny v každém tomto bodu jsou totožné s tečnami sextiky, jež má tento bod za trojnásobný a ostatních sedm za dvojnásobné. Jednotlivé body této křivky K_9 lze sestrojovati takto: uvažujme svazek kubik určený danými osmi body; v devátém bodu base tohoto svazku sestrojme k libovolné křivce tohoto svazku tečnu a z tečnového bodu, jejž tak obdržíme, veďme další tři tečny ke křivce. Jejich dotyčné body jsou body křivky K_9. Určiti k daným osmi dvojnásobným bodům sextiky některý bod devátý, je úloha (kubická) konstruktivně složitá a je tedy nesnadno dáti názorný příklad skupiny devíti — nebo dokonce desíti — dvojnásobných bodů křivky šestého stupně, pokud osm z nich má polohu libovolnou. Je tudíž nasnadě ptáti se po takových zvláštních polohách těchto osmi bodů, při nichž zmíněná křivka K_9 se co možná zjednoduší. Touto otázkou jsme vedeni ke studiu případu velmi jednoduchého, který však vede k zajímavým výsledkům. Aby byl pochopen plně význam těchto výsledků, je třeba se poněkud orientovati o takových sextikách s danými osmi dvojnásobnými body, pro něž jeden z nich je bodem úvratu nebo bodem taknodálním. K tomu cíli je třeba předeslati několik pomocných vět o svazcích křivek, jichž jeden společný bod je takovým bodem.

2. Připomeňme si, že bod úvratu (určitěji bod úvratu 1. řádu) je bod křivky, který je dvojnásobný s jedinou tečnou, kterážto tečna má s křivkou styk druhého řádu; bod taknodální je definován stejně až na to, že tento styk je řádu třetího (v názoru jeví se tento bod jako bod, v němž se dotýkají dvě větve křivky, nebo také jako bod, jenž vznikl splynutím dvou dvojnásobných bodů obyčejných nebo dvou bodů úvratu). Platí pak tyto věty:

---

[1]) V. *Bydžovský:* „Dvojnásobné body křivek 6. st.“ Rozpravy Č. Akademie roč. XXI (1912).

a) Mají-li křivky svazku společný bod úvratu se společnou tečnou, obsahuje svazek právě jednu křivku, pro kterou tento bod je obecně trojnásobný.

Platí pak obráceně:

b) Jestliže ve svazku je křivka, pro kterou jeden bod base je bod úvratu nebo taknodální, a mimo to křivka, pro kterou tento bod je trojnásobný s tečnami vesměs různými od tečny křivky předchozí, obsahuje svazek vesměs křivky, pro které tento bod je bodem úvratu prvního řádu, mimo jednu křivku, pro kterou tento bod je bodem taknodálním (a ovšem danou křivku s bodem trojnásobným).

c) Mají-li křivky svazku společný bod taknodální se společnou tečnou, obsahuje svazek právě jednu křivku, pro kterou tento bod je trojnásobný a jedna tečna v něm je totožná s touto společnou tečnou. Ve zvláštním případě může tento bod býti čtyřnásobný bez další podmínky pro tečny.

Platí pak obráceně:

d) Jestliže ve svazku je křivka, pro kterou jeden bod base je taknodální, a zároveň křivka, pro kterou týž bod je trojnásobný a má jednu tečnu totožnou s tečnou předchozí křivky, nebo křivka, pro kterou tento bod je čtyřnásobný, mají všechny ostatní křivky svazku tento bod za taknodální s touž tečnou.

Analytický důkaz těchto vět je velmi jednoduchý a přenechávám jej čtenáři.

3. Předpokládejme, že je dáno osm bodů $A_1, \ldots, A_8$ v obecné poloze. Pro stručnost budeme nazývati svazek kubických křivek jimi určených stručně svazkem kubik, souhrn sextik majících tyto dvojnásobné body stručně soustavou sextik.

Požadavek, aby sextika náležela do soustavy a měla jeden z daných bodů, na př. A_8, za bod úvratu s danou tečnou, platí za

$$7.3 + 5 = 26$$

podmínek a v soustavě je tedy celý svazek takových křivek. Jedna z nich je dvojnásob počítaná kubika K svazku, určená danou tečnou, a pro ni je tento bod ovšem taknodální; vedle toho obsahuje svazek jednu sextiku S_8 s trojnásobným bodem A_8, jak plyne z věty c). Jsou pak možné dva případy:

a) Jestliže zvolená tečna se nedotýká v bodě A_8 sextiky S_8, obsahuje — podle věty b) — tento svazek mimo křivku S_8 s bodem trojnásobným a křivku s bodem taknodálním, jíž je dvojnásob počítaná kubika K, vesměs křivky s bodem úvratu prvního řádu o dané tečně.

b) Jestliže zvolená tečna je jedna tečna křivky S_8 v jejím trojnásobném bodu A_8, pak podle věty d) všechny křivky svazku mají bod A_8 za taknodální, křivka s obyčejným bodem úvratu tedy neexistuje.

I můžeme vysloviti tento přehledný výsledek:

Při obecné poloze osmi dvojnásobných bodů existuje v soustavě sextik (o těchto dvojnásobných bodech) celý svazek sextik, jež mají jeden z nich za bod úvratu prvního řádu s danou tečnou, jestliže to není zároveň jedna tečna sextiky soustavy, mající tento bod za trojnásobný, a neexistuje žádná nerozpadající se sextika soustavy, která by měla tento bod s touto tečnou za taknodální. Jestliže naopak daná tečna je zároveň jedna tečna uvedené křivky s trojnásobným bodem, existuje v soustavě celý svazek sextik majících zvolený bod za taknodální s touto tečnou a neexistuje žádná sextika soustavy mající tento bod za bod úvratu prvního řádu s touto tečnou.

Pro úplnost budiž jen připomenuto, že touto větou není nijak dotčena otázka po sextikách soustavy, jež mají taknodální bod ležící mimo daných osm dvojnásobných bodů.

4. Po těchto úvodních úvahách obraťme se k vytčené úloze a ptejme se, zdali křivka K_9 může vůbec zmizeti jakožto taková, čili, což je v podstatě totéž, redukovati se na jeden nebo několik bodů. Z konstrukce křivky K_9, udané v odst. 1, ihned plyne, že, stane-li se to, musí tyto body náležeti k basi svazku a že tedy čtyři body base musí býti dotyčné body tečen vedených ke křivce z bodu křivky pro každou křivku svazku. Dotyčné body čtyř tečen vedených ke křivce kubické z jejího bodu mají tu charakteristickou vlastnost,[2]) že diagonální rohy čtyřrohu, jehož jsou vrcholy, leží také na křivce (a mají, spolu ještě s tečnovým bodem uvažovaných čtyř bodů, společný tečnový bod). Tyto tři body jsou tedy pevné a náleží také k basi svazku. Označme 1, 2, 3, 4 vrcholy uvedeného čtyřrohu, I, II, III jeho vrcholy diagonální a buďtež 5, 6 zbývající body base. Snadno se zjistí, že tyto dva body jsou dotyčné body kuželoseček svazku (1234) s přímkou $\overline{56}$; a také, že to jsou dva body polárně sdružené vzhledem ke všem kuželosečkám svazku (1234), t. j., že si odpovídají v kvadratické involuci, jejíž jsou I, II, III hlavní a 1, 2, 3, 4 samodružné body.

Uvažujme sextiky mající dvojnásobné body 2, 3, 4, 5, 6, I, II, III. Devátý bod base svazku kubických křivek určených těmito osmi body je právě bod 1. Další tři tečny vedené z jeho bodu tečnového na libovolné křivce svazku k této křivce dotýkají se jí, vzhledem k tomu, jak body base byly voleny, v bodech 2, 3, 4 a křivka K_9 se skutečně redukuje na tyto tři body.

Máme tedy tento výsledek:

Jestliže osm dvojnásobných bodů sextiky je voleno tak, že devátý bod, jenž skupinu těchto osmi doplňuje na basi svazku kubických křivek, je jeden vrchol čtyřrohu, jehož další tři vrcholy i tři vrcholy diagonální náležejí do zvolené skupiny, pak neexistuje žádná nerozpadající se sextika soustavy mající devátý bod dvojnásobný ležící mimo těchto osm bodů.

---

[2]) V. na př. *H. Schroeter:* Die Theorie der eb. Kurven 3. O., str. 109.

5. K tomuto negativnímu výsledku přistupuje však zajímavý výsledek kladný, když zkoumáme otázku, zda-li existují sextiky, pro něž některý z daných osmi bodů je taknodální, takže tedy platí za dva dvojnásobné body a křivka je eliptická.

Daných osm bodů rozpadá se ve tři skupiny zřejmě odlišné: vrcholy čtyřrohu 2, 3, 4, na něž se redukovalo geometrické místo devátých dvojnásobných bodů; diagonální rohy I, II, III tohoto čtyřrohu; zbývající body 5, 6.

Zkoumejme nejprve bod první skupiny, na př. bod 2. Zvolme v něm libovolnou přímku p a ptejme se po sextikách soustavy, pro které bod 2 je dvojnásobný s jedinou tečnou p. Tento požadavek sám o sobě platí za pět podmínek; spolu s podmínkami, plynoucími z toho, že ostatních sedm bodů mají býti dvojnásobné, dává to 26 podmínek, které tedy určují svazek takových sextik. V tomto svazku známe jednu křivku: dvojnásob počítanou křivku kubickou K svazku (123456I,II,III), určenou přímkou p jako tečnou v bodě 2, a pro kterou tento bod je ovšem taknodální. Vzhledem k obecnosti přímky p můžeme předpokládati, že křivka K se nerozpadne, jak přesvědčí čtenáře snadná úvaha, kterou nechávám stranou. Vedle toho ukazují věty a) a c) odst. 2, že uvažovaný svazek obsahuje sextiku soustavy, pro kterou bod 2 je trojnásobný. Z konfigurace našich bodů plyne — jak není třeba podrobně vykládati — že tato sextika se rozpadá na přímky 24II,23III, a na kuželosečky (2356I,II); (2456I,III). To však je sextika mající bod 2 za čtyřnásobný a náš svazek obsahuje tedy jednu křivku, pro kterou bod 2 je taknodální, a jednu, pro kterou je čtyřnásobný. To však znamená, podle věty d), že ve svazku jsou vesměs křivky, pro něž bod 2 je taknodální se stálou tečnou, a tedy žádná, pro kterou by tento bod byl bodem úvratu prvního řádu. Při tom křivky tohoto svazku se obecně nerozpadnou. Neboť z teorie svazku je známo, že obsahuje-li svazek křivky, které se rozpadají, buď jich obsahuje konečný počet, nebo se rozpadnou všechny. V tomto druhém případě pak buď mají všechny společnou touž součást, nebo každá se skládá z téhož počtu křivek, jež všechny náležejí témuž svazku. Ježto svazek obsahuje dvojnásobnou křivku K, rozpadaly by se všechny křivky svazku ve dvě kubiky svazku. Avšak mezi sextikami, které se rozpadnou ve dvě (různé nebo totožné) kubiky svazku, jediná vyhovuje podmínce, že má v bodě 2 bod taknodální s tečnou p, totiž právě dvojnásob počítaná křivka K. Přímka p byla libovolná; z toho plyne dále, že existuje ∞^1 svazků křivek soustavy, pro které bod 2 je taknodální; tečnu taknodální lze pak voliti.

Úvaha zcela stejná a se stejným výsledkem platí pro body 3, 4.

Zkoumejme s téhož hlediska bod I. Jako v předchozím případě existuje celý svazek sextik soustavy, pro které tento bod je bod dvojnásobný s jedinou tečnou p libovolně danou. Jako v předchozím případě jedna křivka této soustavy je dvojnásob počítaná kubika svazku, nazveme ji opět K, a jedna je sextika soustavy, mající bod I za trojnásobný. Snadno se shledá, že tato křivka je složena z přímek 134, kuželoseček (2356I,II) (2456I,III) a přímky spojující body II, III. Tato složená křivka má tedy bod I skutečně jen za trojnásobný. Jsou pak možné dva případy:

a) Buď přímka p není tečnou žádné ze součástí právě uvedených. Pak svazek obsahuje jednu křivku, pro kterou je bod I taknodální a jednu, pro kterou je trojnásobný, avšak s tečnami veskrz různými od tečny křivky předchozí. Podle věty b) všechny ostatní křivky svazku mají pak bod I za bod úvratu prvního řádu.

b) Přímka p je tečnou některé z uvedených součástí. Ale pak každá sextika, mající bod I za dvojnásobný s jedinou touto tečnou se rozpadne. Neboť splyne-li přímka p s přímkou 134, má tato přímka s touto sextikou společných sedm bodů a je tedy její součástí. Jestliže pak přímka p se dotýká kuželosečky (2356I,II), má tato kuželosečka s křivkou společných 13 bodů a je rovněž její součástí, a stejná úvaha platí pro druhou kuželosečku nahoře uvedenou.

Neexistuje tedy v žádném případě nerozpadající se sextika, pro niž by bod I byl taknodální.

Zcela obdobná je úvaha pro body II, III a vede k týmž výsledkům.

Pokud se týče bodů 5, 6, není třeba celou úvahu vykonati podrobně. Stačí si povšimnouti, že sextika soustavy, pro kterou na př. bod 5 je trojnásobný, je složena z tří kuželoseček (2356I,II), (24561 I, III) (3456II, III), takže bod 5 je pro ni skutečně jen trojnásobný, abychom nahlédli, že dojdeme týchž důsledků jako pro bod I.

Můžeme tedy v přehledu vysloviti tento výsledek:

Má-li skupina osmi bodů, jež jsou dvojnásobnými body sextik, zvláštní seskupení udané v odst. 4, pak existuje ∞^2 *nerozpadajících se sextik soustavy, jež mají některý z bodů I,II,III,5,6 za bod úvratu prvního řádu, avšak žádná, která by jej měla za bod taknodální. Naproti tomu existuje* ∞^2 *nerozpadajících se sextik soustavy, jež mají některý z bodů 2,3,4 za taknodální, avšak žádná, jež by jej měla za bod úvratu prvního řádu.*

Stojí za povšimnutí, že v našem zvláštním případě mocnost soustavy sextik s devíti dvojnásobnými body — z nichž dva ovšem splynou — je táž, jako při obecné poloze daných osmi bodů.

6. Při obecné poloze osmi dvojnásobných bodů sextik soustavy existuje v každém svazku těchto křivek, určeném devátým bodem dvojnásobným, obecně 12 křivek, jež mají ještě další bod dvojnásobný — ležící ovšem, stejně jako devátý bod dvojnásobný, na křivce K_9 — a jež tedy je racionální.[3])

Uvažujme svazek eliptických sextik naší soustavy, jež mají na př. bod 2 za taknodální se společnou tečnou p. Tečny křivek této soustavy na př. v bodě 3 tvoří involuci (čtenář snadno nahlédne, když vezme v úvahu složené křivky svazku, že tyto tečny nejsou

[3]) V. pozn. [1]).

pevné). Samodružné paprsky této involuce náleží těm sextikám, jež mají v bodě 3 bod dvojnásobný s jedinou tečnou. To je především dvojnásob počítaná kubická křivka K svazku určená tečnou p v bodě 2. Druhá je sextika, jež se — jak se snadno nahlédne — obecně nerozpadne a podle výsledku předchozího odst. má bod 3 za taknodální. To je pak křivka racionální, mající totiž 6 obyčejných a dva taknodální dvojnásobné body. Nalezli jsme tedy výsledek:

V každém svazku sextik soustavy, jež mají v jednom z bodů 2, 3, 4 bod taknodální s danou tečnou, existují dvě sextiky racionální, mající totiž taknodální bod vždy v jednom ze zbývajících dvou bodů.

Nazveme-li p' tečnu taknodální v tomto druhém bodu, pak se ze známých vlastností svazků ihned vyvodí, že když tečna p se mění ve svazku, probíhá také přímka p' svazek s prvním projektivní. Tuto projektivnost lze snadno sestrojiti, užijeme-li složených sextik, takže dovedeme pak ke každé tečně p sestrojiti příslušnou tečnu p' a dostaneme tak snadno názorný příklad polohy desíti dvojnásobných bodů racionální sextiky, ovšem specialisovaných tím, že dvakráte dva splynou v body taknodální.

*

Contribution à la théorie des sextiques elliptiques.

(Extrait de l'article précédent.)

Si l'on considère le système de sextiques ayant huit points doubles $A_1, \ldots, A_8$, le lieu du neuvième point double d'une courbe non dégénérée de ce système est, comme on sait (voir la note [1]) du texte tchèque) une courbe K_9 du neuvième ordre ayant les points A_i pour points triples. Cette proposition qui vaut en général, est modifiée d'une façon intéressante dans le cas où — B désignant le neuvième point commun des cubiques du faisceau déterminé par les points A_i — le point B et trois des points A_i sont les sommets d'un quadrangle dont les sommets diagonaux sont encore trois des points A_i. En ce cas la courbe K_9 se réduit à trois points A_i, soit: A_1, A_2, A_3 et il n'existe pas de sextique (non dégénérée) du système ayant des points doubles autres que les points A_i. Mais il existe, par contre, un infinité simple de faisceaux de sextiques du système considéré, ayant un des points A_1, A_2, A_3 pour point tacnodal, et même, dans chaque faisceau — lequel est déterminé par le choix de la tangente tacnodale — de ces courbes elliptiques il existe deux courbes (rationnelles) ayant un second point tacnodal (qui est, bien entendu, encore un des points A_1, A_2, A_3).