Václav Hlavatý

Rovnoběžný posuv podél světelného paprsku v prostor-času teorie relativity

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 246--255

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121388

Rovnoběžný posuv podél světelného paprsku v prostor-času teorie relativity.

V. Hlavatý.

1. **Stanovení problému.** V této práci budu se zabývati lineárním systémem diferenciálním, který určuje rovnoběžný posun podél světelného paprsku ve čtyrrozměrném prostor-času teorie relativity. Ukáži, že tento systém, který má obecně 16 koeficientů je možno redukovati na systém o dvou koeficientech, Z tohoto poznatku odvodím současně některé důsledky, týkající se integrace zmíněného systému.

Způsob odvození vět shora vytčených je tak volen, aby skytal možnost rozšíření pro prostor n-rozměrný.

Odstavce 2—4 jsou odstavce přípravné.

2. **Konexe v prostor-času teorie relativity.** Buďtež x^ν [1]) parametry v prostor-času a $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ parametry jeho konexe. Weyl (a Cartan)[2]) dokázal, že pro konexi prostor-času teorie relativity jest

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}.$$

Je-li $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$ tensor, který v teorii relativity přiřaďuje každému kontravariantnímu vektoru $\mathfrak{v}$ o složkách v^ν **indefinitní** formu $g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu$ (s indexem 1), parametry $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ plňují identitu[3])

$$\frac{\partial}{\partial x_\omega} g_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\omega} g_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\omega} g_{\lambda\alpha} \equiv Q_\omega g_{\lambda\mu}, \tag{1}$$

při čemž Q_ω jsou složky kovariantního vektoru, o nichž předpokládáme, že jsou analytické funkce parametrů x^ν. Oba napsané vztahy určují jednoznačně parametry $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$. [3]) Není-li Q_ω gradient-vektorem, což předpokládáme, jest konexe, určená právě zmíněnými parametry $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, různá od metrické konexe. Budeme ji krátce značiti L_4.

---

[1]) Řecké indexy probíhají hodnoty h_0, h_1, h_2, h_3. Sumace řeckých indexů je prováděna podle Einsteina bez symbolu Σ.

[2]) Weyl: „Mathemat. Analyse des Raumproblemes". (Berlín 1923.) Cartan: „Sur les variétés à connexion affine". (An. Ec. Norm. Sup. 1923 402.)

[3]) Schouten: „Der Ricci-Kalkül". (Berlín 1924.) Str. 73, 75, 217.

3. **Metrické pojmy v L_4.** Zaveďme místo $g_{\lambda\mu}$ tensor $\bar{g}_{\lambda\mu}$

$$\bar{g}_{\lambda\mu} = \sigma\, g_{\lambda\mu}\,, \tag{2}$$

(při čemž σ nechť je derivace schopná funkce parametrů x^ν) a místo vektoru Q_ω vektor $\bar{Q}_\omega$

$$\bar{Q}_\omega = Q_\omega + \frac{\partial}{\partial x^\omega} \log \sigma.$$

Dosadíme-li za $g_{\lambda\mu}$ z rovnice (2) do (1), obdržíme

$$\frac{\partial}{\partial x^\omega} \bar{g}_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\omega}\, \bar{g}_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\omega}\, \bar{g}_{\lambda\alpha} = \bar{Q}_\omega\, \bar{g}_{\lambda\mu}. \tag{1}$$

Ježto Q_ω není gradientvektorem, nelze žádnou volbou funkce σ docíliti, aby $\bar{Q}_\omega = 0$. Neexistuje tedy v L_4 žádný privilegovaný tensor $\sigma g_{\lambda\mu}$, naopak, se stanoviska určení konexe L_4 (totiž parametrů $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$) jsou všechny tensory $\sigma g_{\lambda\mu}$ stejně oprávněné a proto není možno v L_4 obecně zavésti metrické pojmy, jako se to činí v konexi metrické (kde jest $Q_\omega = 0$). Přes to je možno zavésti podél dané křivky v L_4 invarianty vzhledem k (2), které mají charakter metrický:

Budiž dána v L_4 křivka $x^\nu = x^\nu(p)$; její parametr nechť probíhá hodnoty $p_0 \leq p \leq p_1$. Jsou-li v^ν složky kontravariantního vektoru v, skalár

$$m(v) = g_{\lambda\mu}\, v^\lambda v^\mu e^{-\int_{p_0}^{p} Q\,dp}\,, \qquad Q = \frac{dx^\mu}{dp} Q_\mu$$

jest — až na konstantu

$$\sigma_0 = [\sigma(x)]_{x=x_0} = [\sigma(x(p))]_{p=p_0} \text{ —}$$

invariantní vzhledem k (2)

$$\bar{m}(v) = \bar{g}_{\lambda\mu}\, v^\lambda v^\mu e^{-\int_{p_0}^{p} \bar{Q}\,dp} = \sigma\, m(v)\, e^{-\int_{p_0}^{p} d \log \sigma} = \sigma_0\, m(v).$$

Připustíme jen takové transformace (2) při nichž $\sigma_0 = 1$, takže

$$\bar{m}(v) = m(v).$$

Formu $m(v)$ budeme nazývati modulem vektoru v. Je-li modul roven $\varepsilon\ (= \pm 1)$, příslušný vektor pojmenujeme versorem, a je-li $m(v) = 0$, příslušný vektor nazveme nulovým vektorem. Všechny tyto pojmy jsou invariantní vzhledem k (2).

Platí-li pro dva vektory v a w

$$m(v, w) = g_{\lambda\mu}\, v^\lambda w^\mu e^{-\int_{p_0}^{p} Q\,dp} = 0,$$

nazveme tyto vektory harmonické. Je zřejmo, že i tento pojem je invariantním vzhledem k (2).

Buďtež i_1, i_2, i_3, i_4 čtyři harmonické versory a ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 čtyři čísla, definovaná rovnicí

$$m(i_j) = \varepsilon_j{}^{4)} \qquad (j = 1, \ldots, 4).$$

Ježto tyto versory podle předpokladu jsou harmonické, platí pro ně

$$g_{\lambda\mu}\, i_j^{\lambda}\, i_k^{\mu} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \neq k \\ \varepsilon_j e^{\int_{p_0}^{p} Q\,dp} & \text{pro } j = k \end{cases} \qquad (j, k = 1, \ldots, 4). \tag{3$_i$}$$

Označme symbolem D kovariantní derivaci podél křivky $x^\nu(p)$.[5])

Z rovnice (3)$_i$ obdržíme pro $j \neq k$

$$\begin{aligned} D g_{\lambda\mu}\, i_j^{\lambda}\, i_k^{\mu} &\equiv Q g_{\lambda\mu}\, i_j^{\lambda}\, i_k^{\mu} + g_{\lambda\mu}\, [i_k^{\mu}\, D i_j^{\lambda} + i_j^{\lambda}\, D i_k^{\mu}] \\ &= g_{\lambda\mu}\, [i_k^{\mu}\, D i_j^{\lambda} + i_j^{\lambda}\, D i_k^{\mu}] = 0 \end{aligned} \tag{4$_i$}$$

a pro $j = k$

$$\begin{aligned} D g_{\lambda\mu}\, i_j^{\lambda}\, i_j^{\mu} &\equiv Q g_{\lambda\mu}\, i_j^{\lambda}\, i_j^{\mu} + g_{\lambda\mu}\, [i_j^{\mu}\, D i_j^{\lambda} + i_j^{\lambda}\, D i_j^{\mu}] \\ &= \varepsilon_j Q e^{\int_{p_0}^{p} Q\,dp}, \end{aligned}$$

t. j.

$$g_{\lambda\mu}\, i_j^{\mu}\, D i_j^{\lambda} = 0. \tag{5$_i$}$$

Vektor Di_j je tedy buď nulový, nebo harmonický k i_j.

4. **Analogie Frenetových vzorců.** Výsledků předcházejících odstavců použijeme ke stanovení vzorců, obdobných vzorcům Frenetovým. Budiž podél křivky $x^\nu = x^\nu(p)$ dáno vektorové pole i_1, omezené pouze kvalitativní podmínkou

$$m(Di_1) \neq 0,$$

která značí, že Di_1 není nulovým vektorem. Z rovnice (5) tedy plyne, že Di_1 je harmonický k i_1. Označíme-li versor, příslušný k Di_1, symbolem i_2, jest

$$Di_1 = a i_2, \tag{6}$$

při čemž, podle (3)

$$\varepsilon_2 a^2 = m(Di_1).$$

Směr versoru i_2 určíme tím, že zvolíme kladný kořen pro a. Označíme-li jej $\varkappa_1$, získáme

$$|a| = \varkappa_1 = |\sqrt{\varepsilon_2 m(Di_1)}| = \left|\sqrt{\varepsilon_2\, g_{\lambda\mu}\, (Di_1^{\lambda})\, (Di_1^{\mu})\, e^{-\int_{p_0}^{p} Q\,dp}}\right|.$$

Rovnici (6) můžeme pak psáti

$$Di_1 = \varkappa_1 i_2. \tag{6$'$}$$

---

[4]) Tři z těchto čísel musí míti stejné znamení.

[5]) Pro libovolný vektor v^ν jest

$$Dv^\nu \equiv \frac{dv^\nu}{dp} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\, v^\lambda \frac{dx^\mu}{dp}.$$

Známe kromě i_1 již i_2 a můžeme počítati Di_2. Za předpokladu, že Di_2 není lineární kombinací versorů i_1, i_2, určují vektory i_1, i_2, Di_2 trojrozměrný prostor (pro každý bod křivky ovšem jiný). Označíme i_3 versor v tomto prostoru, harmonický k i_1, i_2. Pak podle (5) možno psáti

$$Di_2 = \beta i_1 + \gamma i_3 \tag{7}$$

a koeficienty β, γ lze určiti takto: Vzhledem k (6)′ obdržíme

$$m(Di_2, i_1) = -m(Di_1, i_2) = -\varepsilon_2 \varkappa_1 = \varepsilon_1 \beta$$

a obdobně

$$m(Di_2) = m(\beta i_1 + \gamma i_3) = \varepsilon_1 \beta^2 + \gamma^2 \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \varkappa_1^2 + \varepsilon_3 \gamma^2.$$

Směr versoru i_3 určíme tak, že zvolíme kladný kořen. Píšeme-li pro něj $\varkappa_2$, obdržíme

$$|\gamma| = \varkappa_2 = |\sqrt{[m(Di_2) - \varepsilon_1 \varkappa_1^2]\varepsilon_3}|.$$

Rovnici (7) můžeme tedy psáti

$$Di_2 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varkappa_1 i_1 + \varkappa_2 i_3. \tag{7'}$$

Ježto jsme předpokládali, že Di_2 není lineární kombinací vektorů i_1, i_2, jest nutně $\varkappa_2 \neq 0$.

Známe již vektory i_1, i_2, i_3 a můžeme tedy počítati Di_3. Za předpokladu, že Di_3 není lineární kombinací versorů i_1, i_2, i_3, určuje s nimi čtyřrozměrný prostor (v každém bodě křivky obecně různý, neboť prostor-čas teorie relativity je zakřivený). Označíme versor, harmonický k i_1, i_2, i_3 v tomto prostoru, i_4. Zcela obdobnou úvahou, kterou jsme provedli pro Di_2 obdržíme

$$Di_3 = -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varkappa_2 i_2 + \varkappa_3 i_4, \tag{8}$$

$$\varkappa_3 = |\sqrt{\varepsilon_4 [m(Di_3) - \varepsilon_2 \varkappa_2^2]}|.$$

Ježto Di_3 podle předpokladu není lineární kombinací versorů i_1, i_2, i_3, je nutně $\varkappa_3 \neq 0$.

Podle rovnice (5) je vektor Di_4 nutně kombinací vektorů i_1, i_2, i_3

$$Di_4 = \varrho i_1 + \varphi i_2 + \psi i_3. \tag{9}$$

Koeficienty ϱ, φ, ψ snadno určíme. Vzhledem k (6)′, (7)′ a (8) obdržíme

$$m(i_1, Di_4) = -m(i_4, Di_1) = 0 = \varrho \varepsilon_1,$$
$$m(i_2, Di_4) = -m(i_4, Di_2) = 0 = \varphi \varepsilon_2,$$
$$m(i_3, Di_4) = -m(i_4, Di_3) = -\varepsilon_4 \varkappa_3 = \psi \varepsilon_3,$$

a tudíž rovnici (9) můžeme psáti

$$Di_4 = -\varepsilon_3 \varepsilon_4 \varkappa_3 i_3. \tag{9'}$$

Rovnice (6)′, (7)′ (8) a (9)′ shrneme v jedinou

$$Di_j = -\varepsilon_j \varepsilon_{j-1} \varkappa_{j-1} i_{j-1} + \varkappa_j i_{j+1}, \ (j=1, \ldots, 4; \ \varkappa_0 = \varkappa_4 = 0) \qquad (10)$$

která skýtá obdobu rovnic Frenetových.[6])

5. **Parametr dráhy světelného paprsku.** Dráha světelného paprsku je křivka minimálně-geodetická.[7]) To značí, že její tečný vektor — stále sám s sebou rovnoběžný — je vektorem nulovým, t. j. v každém jejím bodě je površkou časového kužele. Proto není možno stanoviti v obvyklém smyslu privilegovaný paramètr, totiž oblouk světelného paprsku. Přes to můžeme stanoviti jiným způsobem privilegovaný parametr, který ovšem není obloukem v obvyklém smyslu slova.

Buďtež

$$x^\nu = x^\nu(p)$$

parametrické rovnice dráhy světelného paprsku. Musí tedy platiti jednak

$$g_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{dp} \frac{dx^\mu}{dp} = 0$$

a jednak

$$\frac{d^2 x^\nu}{dp^2} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{dp} \frac{dx^\mu}{dp} = \varrho \frac{dx^\nu}{dp}, \qquad (11)$$

při čemž ϱ je libovolná, ale známá funkce parametru p. Zaveďme nový parametr $t = t(p)$ tak, aby rovnice dráhy světelného paprsku byla

$$\frac{d^2 x^\nu}{dt^2} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} = 0.^{7'}) \qquad (12)$$

Rovnice (11) vyjádřená pomocí parametru t jest

$$\left[\frac{d^2 x^\nu}{dt^2} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\mu}{dt}\right] \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = \frac{dx^\nu}{dt} \left(\varrho \frac{dt}{dp} - \frac{d^2 t}{dp^2}\right).$$

Má-li tato rovnice býti equivalentní s (12), musí býti

$$t = c_1 \int e^{\int \varrho\, dp} dp + c_2, \qquad (c_1, c_2 = \text{konst.}).$$

---

[6]) Zcela obdobně by se odvozovaly další vzorce pro $n > 4$. D. J. Struik („Grundzüge der Differenzialgeometrie ....“ p. 76) provedl je pro definitní n-rozměrnou metriku. J. A. Schouten („Ricci-Kalkül“ str. 229) odvodil analogie Frenetových vzorců pro Weylův prostor s definitní formou za jiných předpokladů, než byly naše a konečně L. P. Eisenhart (Riemannian Geometry p. 107) je odvodil — podle Blaschkeho methody — pro n-rozměrnou indefinitní metriku Riemannova prostoru.

[7]) L. P. Eisenhart „R—G“ p. 51.

[7′]) Je možno zavésti též takové koeficienty $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, že rovnice (12) je invariantní vzhledem k transformaci parametru. Srovnej: H. A. Newman: „A gauge invariant tensor calculus.“ (Proc. R. Soc. London, Serie A, No 775 Nov 1927.)

Budeme vždy předpokládati, že dráha světelného paprsku je vyjádřena tímto parametrem.

6. **Paralelní posuv.** Budiž dána v L_4 libovolná regulérní křivka $C(t)$. (V případě, že C je drahou světelného paprsku, předpokládáme parametr t zvolený podle předcházejícího odstavce.) Paralelní posuv libovolného vektoru v podél $C(t)$ je dán systémem diferenciálních rovnic

$$Dv^\nu \equiv \frac{dv^\nu}{dt} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \frac{dx^\mu}{dt} v^\lambda = 0. \tag{13}$$

Dokážeme, že tento systém je možno převésti na jednodušší formu se třemi (a v případě, že C je křivka geodetická, pouze se dvěma) koeficienty, místo s 16 koeficienty

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} \frac{dx^\mu}{dt}.$$

K tomu cíli uvažujme v každém bodě křivky C systém harmonických versorů $e_1, \ldots, e_4$; ty musí splňovati rovnice

$$m(e_i, e_j) = e_i^\lambda e_j^\mu g_{\lambda\mu} e^{-\int_{t_0}^{t} Q\,dt} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad i \neq j \\ \varepsilon'_j (= \pm 1) & \phantom{\text{pro}} \quad i = j. \end{cases} \tag{3$_e$}$$

Souřadnice libovolného vektoru v do tohoto systému jsou skaláry

$$v^i = \varepsilon'_i g_{\lambda\mu} v^\lambda e_i^\mu e^{-\int_{t_0}^{t} Q\,dt} = m(v, e_i)\, \varepsilon'_i. \tag{14}$$

Můžeme proto psáti

$$v = \sum_1^4{}_i\, v^i e_i. \tag{14$'$}$$

Kovariantní derivace vektorů e můžeme vždy vyjádřiti jako lineární kombinaci těchto vektorů

$$De_j = \sum_1^4{}_i\, \omega_j^i e_i. \tag{15}$$

Vzhledem k rovnicím, obdobným k $(4)_i$ $(5)_i$ a vzhledem k $(3)_e$, koeficienty ω_j^i musí splňovati podmínky

$$\omega_j^i \varepsilon'_i + \omega_i^j \varepsilon'_j = 0^{8)} \tag{16}$$

a jest jich tudíž jen 6 nezávislých, obecně od nuly různých.

[8]) Pro případ definitní metriky Riemannovy jest

$$\omega_j^i + \omega_i^j = 0 \tag{16$'$}$$

pro každý směr a ω_j^i jsou koeficienty Cartanovy. — Rovnice (15) a (16) mohou býti interpretovány jako rovnice Poissonovy pro indefinitní metriku a následující systém (13)$'$ určuje pak pohyb tuhého tělesa (vzhledem k systému $e_1, \ldots e_4$).

Kovariantní derivací rovnice (14) obdržíme vzhledem k (13)

$$0 = Dv \equiv \sum_{1}^{4}{}_{ij}\left(\frac{dv^i}{dt} e_i + v^i \omega_i^j e_j\right) = \sum_{1}^{4}{}_i\left(\frac{dv^i}{dt} + \sum_{1}^{4}{}_j v^j \omega_j^i\right) e_i$$

a proto

$$\frac{dv^i}{dt} + \sum_{1}^{4}{}_j v^j \omega_j^i = 0 \quad (i = 1, \ldots, 4) \tag{13'}$$

Systém (13)′, ekvivalentní s (13) má jen obecně 6 koeficientů $\neq 0$. Vzhledem k tomu, že versory e byly libovolně určeny, je možno očekávati, že vhodnou jejich volbou můžeme počet koeficientů zmenšiti. Skutečně, položíme-li

$$e_i = i_i, \quad (\varepsilon_i = \varepsilon'_i), \quad (i = 1, \ldots, 4), \tag{17}$$

— při čemž i_1 je libovolný versor, omezený jen kvalitativními podmínkami z odstavce 4 — obdržíme srovnáním rovnic (10), (17) a (15)

$$\begin{aligned} &\omega_2^1 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varkappa_1; \quad &\omega_3^2 = -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varkappa_2; \quad &\omega_4^3 = -\varepsilon_3 \varepsilon_4 \varkappa_3; \\ &\omega_1^2 = \varkappa_1; &\omega_2^3 = \varkappa_2; &\omega_3^4 = \varkappa_3. \end{aligned} \tag{18}$$

Ostatní koeficienty jsou rovny nule. Dosadíme-li hodnoty (18) do (13)′, získáme systém

$$\begin{aligned} \frac{dv^1}{dt} - v^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varkappa_1 \quad \cdot \quad &= 0 \\ \frac{dv^2}{dt} - v^3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varkappa_2 + v^1 \varkappa_1 &= 0 \\ \frac{dv^3}{dt} - v^4 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varkappa_3 + v^2 \varkappa_2 &= 0 \\ \frac{dv^4}{dt} + \quad \cdot \quad + v^3 \varkappa_3 &= 0. \end{aligned} \tag{13''}$$

Systém (13)″ je ekvivalentní s (13), ale obsahuje jen tři podstatně nezávislé koeficienty $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$. Tvrzení, proslovené na počátku tohoto odstavce pro obecnou křivku, je tedy dokázané.

7. **Redukce systému (13) pro případ dráhy světelného paprsku.** Při odvození systému (13)″ neučinili jsme zvláštních předpokladů o křivce $C(t)$, podél níž se posuv děje. Můžeme tedy předpokládati, že C je drahou světelného paprsku. V tom případě, — vzhledem k rovnici (12) — je vektor $\frac{dx}{dt}$, o složkách $\frac{dx^\nu}{dt}$, partikulárním integrálem systému (13) a tudíž — podle (14) —

$$m\left(e_i, \frac{dx}{dt}\right)\varepsilon_i = \xi^i = e^{-\int_{t_0}^{t} Q\,dt} g_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{dt} e_i^\mu \varepsilon_i \quad (i = 1, \ldots, 4)$$

je partikulárním integrálem systému (13)''. Můžeme jej tedy redukovati na lineární systém třetího řádu. Užití metody, kterou jsem vyložil na jiném místě pro případ obecný,[8'] možno systém ten převésti bez quadratur na jednodušší o dvou koeficientech:

S y s t é m (13), který definuje paralelní posuv podél světelného paprsku v prostor-času teorie relativity je možno bez kvadratur převésti na lineární systém o dvou koeficientech.

Jako vedlejší výsledek plyne: Známe-li podél světelného paprsku jedinou kongruenci, která má „křivosti" konstantní, paralelní posuv (podél světelného paprsku, totiž integraci systému (13)) je možno provésti bez kvadratur, užitím pouhých operací algebraických.

Užitím partikulárního integrálu ξ^i a dvou kvadratur můžeme snadno nalézti ještě jeden partikulární integrál. Označme jej e_{j_4} ($j_4 = 1$, nebo 4) a pišme $j_1, j_2, j_3 = 2, 3, 4$, nebo $= 1, 2, 3$.

Položíme-li

$$\varkappa_{j_1} = k, \qquad \varkappa_{j_2} = l$$

$$v^{j_1} = c_0 \xi^{j_1} + X; \quad v^{j_2} = c_0 \xi^{j_2} + Y; \quad v^{j_3} = c_0 \xi^{j_3} + Z; \quad v^{j_4} = c_0 \xi^{j_4},$$

systém (13)'' se redukuje na jednodušší

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \quad\cdot\quad Y \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_2} k \quad\cdot \\ \frac{dY}{dt} &= -Xk \quad\cdot\quad + Z \varepsilon_{j_2} \varepsilon_{j_3} l \\ \frac{dZ}{dt} &= \quad\cdot\quad -Yl \quad\cdot \end{aligned} \qquad (13)'''$$

který obsahuje jen dva koeficienty k, l.

8. **Riccatiho rovnice.** Systém (13)''' možno prevésti snadno na Riccatiho rovnici diferenciální. Položme

$$X\sqrt{\varepsilon_{j_1}} = c\,\frac{1-\lambda\mu}{\lambda-\mu}, \qquad Y\sqrt{\varepsilon_{j_2}} = ci\,\frac{1+\lambda\mu}{\lambda-\mu}, \qquad Z\sqrt{\varepsilon_{j_3}} = c\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}$$

$$(c = \text{const.}, \quad i = \sqrt{-1}).$$

Obdržíme jednak

$$\varepsilon_{j_1} X^2 + \varepsilon_{j_2} Y^2 + \varepsilon_{j_3} Z^2 = c^2,$$

což je integrál systému (13)''' a jednak

[8'] „Proprietà differenziali delle curve in uno spario à connessione lineare generale" a „Ancora sulle proprietà differenziali..." (Obě práce vyjdou v Rendiconti Palermo.)

$$\frac{dX}{dt}\sqrt{\varepsilon_{j_1}} = c\,\frac{(\mu^2-1)\frac{d\lambda}{dt} - (\lambda^2-1)\frac{d\mu}{dt}}{(\lambda-\mu)^2}$$

$$\frac{dY}{dt}\sqrt{\varepsilon_{j_2}} = ci\,\frac{(\lambda^2+1)\frac{d\mu}{dt} - (\mu^2+1)\frac{d\lambda}{dt}}{(\lambda-\mu)^2} \qquad (i=\sqrt{-1})$$

$$\frac{dZ}{dt}\sqrt{\varepsilon_{j_3}} = 2c\,\frac{\lambda\frac{d\mu}{dt} - \mu\frac{d\lambda}{dt}}{(\lambda-\mu)^2}.$$

Eliminací λ resp. μ z těchto rovnic obdržíme

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} &= i\left[(\lambda^2-1)\frac{\sqrt{\varepsilon_{j_3}}}{2}\,l - \lambda k\sqrt{\frac{\varepsilon_{j_1}}{\varepsilon_{j_2}}\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_2}}\right]\\ \frac{d\mu}{dt} &= i\left[(\mu^2-1)\frac{\sqrt{\varepsilon_{j_3}}}{2}\,l - \mu k\sqrt{\frac{\varepsilon_{j_1}}{\varepsilon_{j_2}}\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_2}}\right],\end{aligned} \qquad (19)$$

což je v podstatě jediná rovnice Riccatiho. Získali jsme tak větu:

D i f e r e n c i á l n í s y s t é m l i n e á r n í (13), k t e r ý u r č u j e p a r a l e l n í p o s u n p o d é l s v ě t e l n é h o p a p r s k u v L_4, j e m o ž n o v t o m t o p ř í p a d ě p ř e v é s t i n a j e d i n o u r o v n i c i R i c c a t i h o (19).

9. **Poznámka.** Postup předcházejícího odstavce je v podstatě klasický postup Darboux-ův. Věta vyslovená je však zvláštním případem teorému, který plyne porovnáním mých prací o ortogonálních systémech řádu n[9]) s prací Laurovou[10]) a zní:

D i f f e r e n c i á l n í s y s t é m l i n e á r n í ř á d u 4 s q u a d r a t i c k ý m i n t e g r á l e m d e f i n i t n í m j e m o ž n o p ř e v é s t i n a d v ě r o v n i c e R i c c a t i h o:

$$2\tau' = \varkappa_2 - i(\varkappa_3+\varkappa_1) + [\varkappa_2 + i(\varkappa_3+\varkappa_1)]\,\tau^2$$

$$2\sigma' = \varkappa_2 + i(\varkappa_3-\varkappa_1) + [\varkappa_2 - i(\varkappa_3-\varkappa_1)]\,\sigma^2..$$

---

[9]) „Sulla riduzione dei sistemi ortogonali di equazioni differenziali lineari“, „Complementi al teorema di riduzione dei sistemi differenziali ortogonali“ a „Sui sistemi differenziali lineari dotati di un integrale quadratico indefinito“. (Ac. dei Lincei, zasedání 4. a 18. prosince 1927.)

[10]) „Sulla integrazione di un sistema di quattro equazioni lineari a determinante gobbo per mezzo di due equazioni di Riccati“ (Ac. Torino 1906-07, 1907-08). Pro speciełní formu tohoto systému čtyř rovnic udal neodvisle od Laury stejný výsledek též J. Žďárský (Časopis LII, 1923, str. 204—206).

Le déplacement parallèle dans l'espace-temps de M. Weyl.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur démontre que le système (11) qui définit le déplacement parallèle le long d'une courbe C dans l'éspace-temps relativistique de M. Weyl, peut être ramené à la forme plus simple (13)″ ne contenant que 3 coefficients $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ (les ε étant ± 1). Si la courbe C est un rayon de lumière, le système en question peut être réduit en un système à deux coefficients seulement. D'autre part en employant une autre solution particulière de (11) (d'ailleurs facile à trouver) on peut le réduire à une équation de Riccati (19).

Řím, leden 1928.