Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Jeřábek

O orthogonálných hyperboloidech

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 301--304

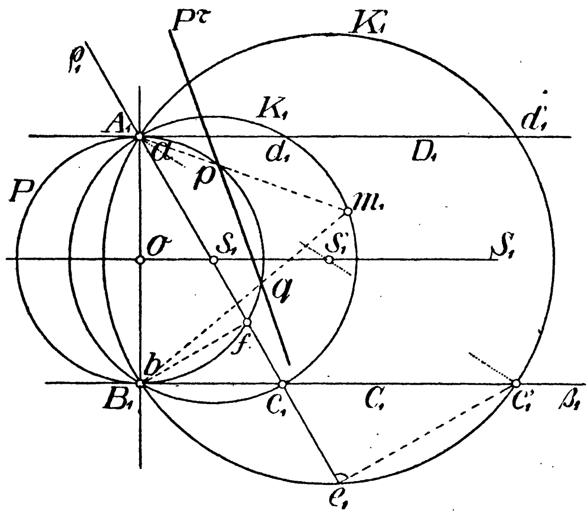
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121384`

O orthogonálných hyperboloidech.

V. Jeřábek.

I. Orthog. hyperboloid jednodílný.

V průmětně π jest dán kruh P, jeho průměr ab a přímka S_1 vedená středem o kolmo na $\overline{ab}$. Zvolený bod s_1 na S_1 nechť je průmětem bodu s, jehož souřadnice $z = \overline{s_1 s} = \overline{o s_1}$. Kruhem K_1 o středu



Obr. 1.

s_1 a poloměru $\overline{s_1 a}$, zobrazme průmět kruhu $K \parallel \pi$, jenž má svůj střed s na přímce $S \equiv os$, promítající se do S_1 (obr. 1).

Geom. místem kruhu K, jenž protíná přímky A, B, kolmo na π v bodech a, b vztýčené, jest plocha (K), které náleží též daný kruh P. Proložme přímkou B rovinu $\beta \perp \pi$ rovnoběžně s přímkou S a zobrazme její průmět přímkou β_1, jdoucí bodem $b \parallel$ s S_1. Kružnice K protíná pak rovinu β v dalším bodě c, jehož průmět c_1 leží na kružnici K_1 diametrálně proti bodu a. Stanovíme-li přímkami S, A a průmětnou π hyp. paraboloid, jest jedna jeho površka, rovnoběžná s π, průměrem kruhu K a jejím průmětem průměr A_1c_1 kruhu K_1. Geom. místem bodu c, v němž zmíněná površka a kružnice K rovinu β sekou, je přímka $C \equiv bc$, společná ploše (K) a hyp. paraboloidu, ježto její průmět $C_1 \equiv bc_1$ je rovnoběžný s průmětem S_1 površky S hyp. paraboloidu.

Určeme přímkou A a kruhy P, K hyperboloid, jemuž patrně též přímka B náleží, ježto kružnice P, K a přímku A — tuto v úběžném bodě — seče. Stopa ac_1 roviny ϱ, proložené přímkou A a bodem c, seče kružnici P v bodě f, který je tudíž stopou površky fc hyperboloidu, která též přímku A pod průmětnou protíná. Považujme fc ($fc_1 \equiv A_1c_1$) za přímku prvé soustavy površek hyperboloidu. Mění-li kruh K na ploše svou polohu, popíše bod c přímku C, která z té příčiny je površkou druhé soustavy přímek hyperboloidu. Rovina (bcf), obsahujíc přímku $bf \perp \varrho$, stojí též na ní kolmo. Společná jejich přímka cf je tudíž průsečnicí dvou navzájem na sebe kolmých rovin, z nichž jedna (ϱ) prochází pevnou přímkou A a druhá (bcf) pevnou přímkou C, s ní mimoběžnou — pročež zmíněný hyperboloid je orthogonálný. Nyní dokážeme, že tento hyperboloid je totožný s dříve jmenovanou plochou (K).

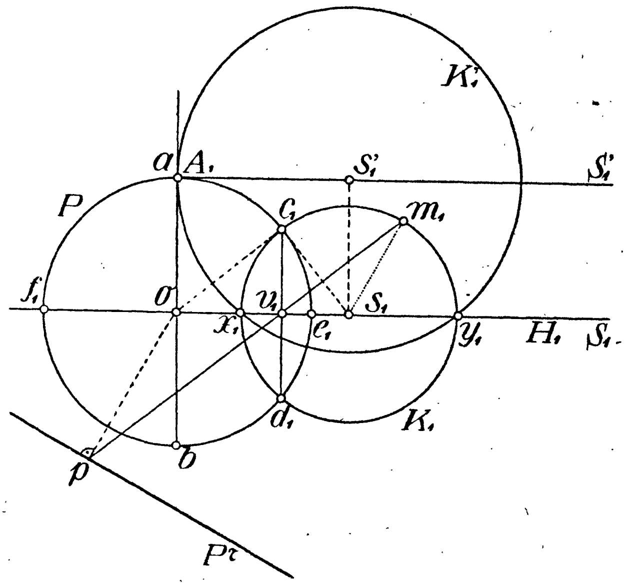
Za tím účelem protněme površkou cf hyperboloidu rovinu kteréhokoli kruhu K' plochy (K) v bodě e, jehož průmět e_1 je na c_1f, a přímkou C týž kruh v bodě c', jehož průmět c'_1 je diametrálně položený k bodu a. Jest nyní zřejmo, že body c', c, b, f, e leží v téže rovině a že přímky bf, ec' jsou rovnoběžnými průsečnicemi uvedené roviny s rovinami rovnoběžnými kruhů P a K'. Ježto $bf \perp ae_1$, je též $c'_1e_1 \perp ae_1$, pročež e_1 leží na K'_1 a bod e na kružnici K'. Náleží tudíž každý kruh K' plochy (K) hyperboloidu — čili obě plochy jsou totožné. Asympt. kužel této plochy je určen vrcholem o a kruhem L soustředným s K; jeho průmět L_1 má svůj střed v s_1 a dotýká se v bodě o přímky ab.

Tečná rovina plochy. Zvolme na kružnici K_1 bod m_1, jako průmět bodu m hyperboloidu a sestrojme v něm rovinu tečnou. Tato je stanovena dvěma površkami hyperboloidu různých soustav, jejichž průměty A_1m_1, B_1m_1 vytínají na stopě P hyperboloidu stopníky p, q površek mp, mq, pročež spojnice pq je stopou P^t roviny tečné τ.

II. Orth. hyperboloid dvojdílný.

Tak jako jsme (obr. 1) definovali orth. hyperboloid jednodílný geom. místem kruhů K, jejichž středy s jsou na přímce S a které promítají se do kruhů K_1 procházejících body a, b, tak lze též definovati hyperboloid nepřímkový geom. místem kruhů, majících s kruhy K společné roviny a středy s, promítajících se do kružnice, jež daný kruh P orth. protínají. Oba tyto hyperboloidy mají společný střed o a asympt. kužel $o(L)$, který činí přechod od jednoho hyperboloidu ke druhému.

Zobrazme opět kruh P, ležící v průmětně π, jeho průměr $\overline{ab}$, střed o a přímku S_1, stojící v o kolmo na ab. Zvolený bod s_1 na S_1, budiž průmětem bodu s přímky $S \equiv os$, jehož výška nad průmětnou $z = \overline{s_1 s} = \overline{os_1}$. Veďme bodem a přímku $S' \parallel S$ a sestrojme její průmět S'_1 tečnou kružnice P v bodě a. V rovině přímek $(S'S)$ vedená bodem s přímka $ss' \parallel ab$ seče přímku S' v bodě s' $(s_1 s'_1 \parallel ab)$. Geom. místem kruhu K' o středu s', jenž se promítá do kruhu K'_1 sestrojeného ze středu s'_1 poloměrem $\overline{s'_1 a}$, je orth. kužel, jehož jedna po-



Obr. 2.

vrchová přímka $A \perp \pi$ má svůj průmět $A_1 \equiv a$. Tento kužel protíná rovina $(os_1 s)$ v hyperbole H $(H_1 \equiv S_1)$ (obr. 2), jejíž dva body x, y jsou průsečíky kruhu K' s rovinou $(os_1 s)$. Geom. místem kruhu K, jenž s K' v téže rovině leží, body x, y prochází a má střed v bodě s, je hyperboloid dvojdílný. Jeho povrchová kružnice K promítá se do K_1 opsané to kružnice nad průměrem $\overline{x_1 y_1}$. Je-li $\overline{c_1 d_1}$ společná tětiva kruhů K_1, P a v_1 její průsečík s přímkou S_1, pak bod o má vzhledem ke kružnicím K'_1 a K_1 stejnou mocnost

$$\overline{ox_1} \cdot \overline{oy_1} = \overline{oa}^2 = \overline{oc_1}^2,$$

z čehož vysvítá, že kruh K_1 protíná P v bodech c_1, d_1 pravoúhelně. Tím lze hyperboloid definovati, jakožto geom. místo kruhu K, který má střed na přímce S a jehož průmět K_1 kruh P seče orthogonálně, jak dříve bylo řečeno, proto nazveme i tento hyperboloid orthogonálným. Jeho středem je bod o, průměrem $os \equiv S$ a asympt.

kuželem posunutá poloha kužele $a(K')$. Do bodů e_1, f_1 v nichž S_1 seče kružnici P, promítají se kruhové body e, f, společné průměru S a hyperboloidu.

Ježto s_1c_1, s_1d_1 jsou tečnami kružnice P, je tětiva c_1d_1 polárou bodu s_1 a body e_1, f_1, s_1, v_1 tvoří harmonickou čtveřinu bodovou. Opíšeme-li podél kruhu K hyperboloidu tečný kužel $v(K)$, má vrchol v na průměru S a jeho rovina podstavy K je polárnou rovinou pro pól v, pročež body e, f, s, v jsou harmonické. A že tři body e, f, s harmonické čtveřiny bodové promítají se do bodů e_1, f_1, s_1 harmonické řady e_1, f_1, s_1, v_1, promítá se též i vrchol v do bodu v_1 této řady. Z toho je patrno, že společná tětiva c_1d_1 kružnic P a K_1, protíná S_1 v průmětu v_1 vrcholu v.

Tečná rovina plochy. Zvolme na K_1 bod m_1 a mějme jej za průmět bodu m hyperboloidu. Rovina tečná τ v bodě m je stanovena površkou vm tečného kužele $v(K)$ a tečnou kruhu K v bodě m. Přímkami vm, vo proložená rovina, seče rovinu kruhu K v přímce sm a průmětnu π v rovnoběžné s ní přímce op, jejíž průsečík s průmětem v_1m_1 površky vm je této stopou p. Sestrojíme tedy stopu P^τ roviny tečné τ kolmicí, vedenou bodem p kolmo na poloměr m_1s_1.

*

Sur les hyperboloides orthogonaux.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur considère l'hyperboloïde orthogonal à une nappe comme le lieu de cercles parallèles, se projetant sur le plan de projection π suivant un faisceau de cercles à deux points d'intersection réels; il en déduit la définition connue de cet hyperboloïde en déterminant deux faisceaux de plans perpendiculaires dont les axes ne se rencontrent pas. Il en étudie le cône asymptotique et passe à l'étude de l'hyperboloïde à deux nappes, lequel est défini, d'une manière analogue, comme le lieu des cercles parallèles à π et se projetant sur π suivant un faisceau de cercles aux points d'intersection imaginaires, ou, ce qui veut dire le même, suivant un faisceau de cercles coupant orthogonalement un cercle donné.