Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

E. Bunický

O asymptotických parabolách

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 186--201

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121383

O asymptotických parabolách.

Napsal *E. Bunický.*

1. Buďtež

$$y = f(x), \tag{1}$$

$$y_1 = f_1(x) \tag{2}$$

dvě reálné rovinné křivky v souřadnicích pravoúhlých nebo kosoúhlých. Platí-li

$$\lim_{x \to \infty_*} (y - y_1) = \lim_{x \to \infty_*} [f(x) - f_1(x)] = 0,$$

kde symbol ∞_* znamená nekonečno určitého znamení ($+\infty$ nebo $-\infty$), můžeme nazývati jednu z křivek *asymptotou* druhé. Je to pouze přirozené zobecnění pojmu asymptotické přímky. Zvláště budeme říkati parabole řádu n-ho

$$\eta = \varkappa_n x^n + \varkappa_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \varkappa_1 x + \varkappa_0, \tag{3}$$

kde n označuje celé kladné číslo, $\varkappa_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $\varkappa_n \neq 0$) dané konstanty a η pořadnici křivky, *asymptotická parabola,* bude-li pro ni platiti

$$\lim_{x \to \infty_*} (y - \eta) = \lim_{x \to \infty_*} [f(x) - \varkappa_n x^n - \varkappa_{n-1} x^{n-1} - \ldots - \varkappa_1 x - \varkappa_0] = 0. \tag{4}$$

Podmínku (4) můžeme psáti v tvaru ekvivalentním, totiž v tomto:

$$f(x) = \varkappa_n x^n + \varkappa_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \varkappa_1 x + \varkappa_0 + \alpha,$$

a tudíž rovnici křivky (1) v tvaru

$$y = \varkappa_n x^n + \varkappa_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \varkappa_1 x + \varkappa_0 + \alpha, \tag{5}$$

při čemž $\alpha = \alpha(x)$ znamená funkci splňující podmínku

$$\lim_{x \to \infty_*} \alpha(x) = 0. \tag{6}$$

Z rovnice (5) a (6) se odvodí pomocí elementárních vět z teorie limit vzorce

$$
\left.
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty_*} \frac{y}{x^n} = \varkappa_n, \quad \lim_{x\to\infty_*} \frac{y-\varkappa_n x^n}{x^{n-1}} = \varkappa_{n-1},\\
&\lim_{x\to\infty_*} \frac{y-\varkappa_n x^n - \varkappa_{n-1} x^{n-1}}{x^{n-2}} = \varkappa_{n-2}, \ldots,\\
&\lim_{x\to\infty_*} \frac{y-\sum\limits_{i=\nu+1}^{n} \varkappa_i x^i}{x^\nu} = \varkappa_\nu, \ldots,\\
&\lim_{x\to\infty_*} \frac{y-\varkappa_n x^n - \varkappa_{n-1} x^{n-1} - \ldots - \varkappa_2 x^2}{x} = \varkappa_1,\\
&\lim_{x\to\infty_*} (y-\varkappa_n x^n - \varkappa_{n-1} x^{n-1} - \ldots - \varkappa_2 x^2 - \varkappa_1 x) = \varkappa_0,
\end{aligned}
\right\} \quad (7)
$$

při čemž y označuje všude funkci $f(x)$ v rovnici (1). Klademe-li $\sum\limits_{i=n+1}^{n} \varkappa_i x^i = 0$ a $\sum\limits_{i=n}^{n} \varkappa_i x^i = \varkappa_n x^n$ a píšeme-li pro libovolnou danou funkci $\varphi(x)$ obecně $[\varphi(x)]_\infty$ místo $\lim\limits_{x\to\infty_*} \varphi(x)$, což budeme činiti stále v dalším (při čemž znaménko symbolu ∞ jest podle předpokladu zcela určeno), nabudou vzorce (7) tvaru kratšího

$$
\left[\frac{y-\sum\limits_{i=\nu+1}^{n} \varkappa_i x^i}{x^\nu}\right]_\infty = \varkappa_\nu \quad (\nu = n,\ n-1,\ n-2, \ldots, 1, 0). \qquad (8)
$$

Ježto čísla $\varkappa_i$ označují, podle předpokladu, konečné limity, dávají nám vzorce (8) v novém tvaru nutné a dostačující podmínky pro to, aby křivka (1) měla asymptotickou parabolu řádu n a umožňují nám mimoto, vypočísti postupně koeficienty $\varkappa_n, \varkappa_{n-1}, \ldots, \varkappa_1, \varkappa_0$ v rovnici (3) asymptotické paraboly, jestliže obecně existuje. Poněvadž pak číslo $\varkappa_n$ jest podle předpokladu různé od nuly, je y, pro x rostoucí do nekonečna, podle prvního ze vzorců (8), funkce nekonečně veliká celistvého řádu n. Ježto tento řád jest definován, jak známo jednoznačně, může míti křivka (1), jak ukazují vzorce (8), jenom jednu asymptotickou parabolu dokonale určenou, má-li vůbec nějakou, když x se blíží nekonečnu určitého daného znamení.

2. Závislost, která váže asymptotu (t. j. asymptotickou přímku) a mezní polohu tečny ke křivce, když bod dotyčný se vzdaluje do nekonečna, jest dobře známa. Tato závislost se vyslovuje touto větou: M a j í - l i v r o v n i c i t e č n y

$$
Y = y' x + (y - xy')
$$

k e k ř i v c e (1) v b o d ě (x, y) k o e f i c i e n t y y' a $y - xy'$ k o n e č n é limity

$$[y']_\infty = \varkappa_1 \tag{9}$$

$$[y - xy']_\infty = \varkappa_0, \tag{10}$$

kde symbol ∞ znamená nekonečno daného znaménka, je přímka

$$y = \varkappa_1 x + \varkappa_0,$$

t. j. mezní poloha tečny, asymptotou křivky (1.) Existence konečných limit (9) a (10) dává postačující podmínku pro existenci asymptoty ke křivce (1); avšak tato podmínka není nutná. Na příklad křivka

$$y = \frac{\sin x^2}{x}$$

má za asymptotu přímku $y = 0$, to jest osu x v obou směrech do nekonečna. A přece pro tuto křivku derivace

$$y' = 2\cos^2 x - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

neblíží se žádné určité limitě, když x roste do nekonečna; jinými slovy, limita (9) v uvažovaném případě neexistuje.

Mezi všemi parabolami řádu n (n jest kladné celé číslo) jest jedna, jejíž styk s křivkou (1) jest obecně řádu nejvyššího, to jest řádu n. Nazveme tuto parabolu parabolou oskulační řádu n křivky (1) a dokážeme pro tuto oskulační parabolu řádu n větu úplně obdobnou k větě, jež se týká asymptotické přímky: blíží-li se oskulační parabola řádu n neomezeně nějaké mezní poloze, když bod dotyku této paraboly s křivkou (1) se vzdaluje do nekonečna, představuje tato mezní poloha asymptotickou parabolu křivky. Obrácená věta, stejně jako v případě asymptotické přímky, neplatí obecně.

3. Abychom dokázali větu právě vyslovenou, což jest hlavním předmětem tohoto článku, napišme rovnici oskulační paraboly řádu n křivky (1). Předpokládáme-li, že funkce $y = f(x)$ v rovnici (1) má pro x rostoucí do nekonečna konečné derivace $y', y'' \ldots y^{(n)}$, nalezneme snadno, že oskulační parabola řádu n v bodě x, y křivky (1) jest dána rovnicí

$$\begin{aligned} Y = y + y'(X - x) + \frac{y''(X-x)^2}{2!} + \ldots + \\ + \frac{y^{(\nu)}(X-x)^\nu}{\nu!} + \ldots + \frac{y^{(n)}(X-x)^n}{n!}. \end{aligned} \tag{11}$$

Křivka (1) může míti body, jichž řád styku s parabolou (11) převyšuje n anebo body takové, v nichž určitý řád styku neexistuje. Budeme nicméně stále nazývati parabolu (11) oskulační parabolou řádu n křivky (1). Uspořádáme-li výrazy na pravé straně rovnice (11) podle mocnin X, dostaneme identicky

$$Y(X) = y + y'((X-x) + \frac{y''(X-x)^2}{2!} + \ldots + \frac{y^{(n)}(X-x)^n}{n!} =$$
$$= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n.$$

Zavedeme-li do této identity $X = 0$ a diferencujeme-li ji pak podle X jednou, dvakrát, ..., n-krát a potom položíme $X = 0$, obdržíme postupně

$$a_0 = Y(0) = y - xy' + \frac{x^2 y''}{2!} - \ldots + \frac{(-x)^n y^{(n)}}{n!},$$
$$a_1 = \frac{Y'(0)}{1!} = y' - xy'' + \frac{x^2 y'''}{2!} - \ldots + \frac{(-x)^{n-1} y^{(n)}}{n!}$$

a obecně

$$a_i = \frac{Y^{(i)}(0)}{i!} = \frac{1}{i!}\left[y^{(i)} - xy^{(i+1)} + \frac{x^2 y^{(i+2)}}{2!} - \ldots + \frac{(-x)^{n-i} y^{(n)}}{(n-i)!}\right]$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n;\ y^{(0)} = y,\ 0! = 1).$$

Můžeme tedy psáti rovnici paraboly oskulační řádu n ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} Y = {} & \frac{y^{(n)}}{n!} X^n + \frac{y^{(n-1)} - xy^{(n)}}{(n-1)!} X^{n-1} + \\ & \frac{y^{(n-2)} - xy^{(n-1)} + \frac{x^2 y^{(n)}}{2!}}{(n-2)!} X^{n-2} + \ldots + \\ & + \frac{1}{i!}\left[y^{(i)} - xy^{(i+1)} + \frac{x^2 y^{(i+2)}}{2!} - \ldots + \frac{(-x)^{\nu} y^{(i+\nu)}}{\nu!} + \ldots + \right. \\ & \left. + \frac{(-x)^{n-i} y^{(n)}}{(n-i)!}\right] X^i + \ldots \\ & + \left[y' - xy'' + \frac{x^2 y'''}{2!} - \ldots + \frac{(-x)^{n-1} y^{(n)}}{(n-1)!}\right] X + \\ & + \left[y - xy' + \frac{x^2 y''}{2!} - \ldots + \frac{(-x)^n y^{(n)}}{n!}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Položíme-li

$$\left.\begin{aligned} & z - xz' + \frac{x^2 z''}{2!} - \ldots + \frac{(-x)^{\nu} z^{(\nu)}}{\nu!} = \\ & = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{(-x)^i z^{(i)}}{i!} = t_\nu(z) \quad (z^{(0)} = z;\ 0! = 1,\ t_0(z) = z), \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

kde z jest libovolná funkce mající konečné derivace $z', z'', \ldots, z^{(\nu)}$, nabude rovnice oskulační paraboly tvaru

$$\left.\begin{aligned} Y = \frac{t_0(y^{(n)})}{n!}\,.\,X^n + \frac{t_1(y^{(n-1)})}{(n-1)!}X^{n-1} + \ldots + \\ + \frac{t_i(y^{(n-i)})}{(n-i)!}X^{n-i} + \ldots + \frac{t_{n-1}(y')}{1!}X + t_n(y). \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

4. Uvažujme nyní některé vlastnosti operátoru t_ν, který jest definován vzorcem (13). Platí zřejmě, vzhledem k lineárnímu charakteru operátoru t_ν, pro každé dvě funkce $z(x)$ a $u(x)$ mající konečné derivace až do řádu ν, jsou-li a a b libovolně zvolené konstanty:

$$t_\nu(az + bu) = at_\nu(z) + bu_\nu(z). \quad (15)$$

Snadno také dokážeme identity

$$\left(\frac{z}{x}\right)^{(\nu)} = \frac{(-1)^\nu \nu!\, t_\nu(z)}{x^{\nu+1}} \quad (x \neq 0) \quad (16)$$

a

$$\left(\frac{t_{\nu-1}(z)}{x^\nu}\right)' = -\frac{\nu\, t_\nu(z)}{x^{\nu+1}} \quad (x \neq 0,\ \nu \geqq 1), \quad (17)$$

kde symbol (ν), resp. čárka označují derivaci řádu ν, resp. prvního podle x. Identitu (16) odvodíme vypočítáním ν-té derivace součinu zx^{-1} podle vzorce Leibnizova. Vzorec (17) se odvodí eliminací výrazu $\left(\frac{z}{x}\right)^{(\nu)}$ z identity (16) a z výsledku diferencování identity analogické, kterou obdržíme, dosadíme-li $\nu - 1$ za ν.

Poznámka. Operátor t_ν úzce souvisí s diferenciálními rovnicemi Raffy-ho,[1]) stejně jako s Taylorovou řadou. Neboť každá Raffyho rovnice má tvar

$$\psi\,[t_0(y^{(n)}),\ t_1(y^{(n-1)}),\ \ldots,\ t_{n-1}(y'),\ t_n(y)] = 0,$$

při čemž ψ jest daná funkce. Vedle toho, píšeme-li identitu (16) ve tvaru

$$\frac{\left(\frac{z}{x}\right)^{(\nu)}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{(\nu)}} = t_\nu(z)$$

a položíme-li pro krátkost

$$\lim_{\nu\to+\infty} \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{(\nu)}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{(\nu)}} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{(\infty)}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{(\infty)}},\ \lim_{\nu\to+\infty} t_\nu(y) = t_\infty(y),$$

[1]) Srv. práci Raffyho: „Sur certaines équations d'ordre supérieur, analogues à l'équation de Clairaut", Bulletin de la Société Mathématique de France, 1897, anebo práci autorovu „Sur les solutions singulières des équations de Raffy", Bulletin des Sciences Mathématiques, 1907.

obdržíme pro každou holomorfní funkci $y = y(x)$

$$y(0) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{(\infty)}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{(\infty)}} = t_\infty(y) = y - xy' + \frac{x^2 y''}{2!} - \ldots$$

anebo, změníme-li vhodně proměnnou,

$$y(x) = \frac{\left(\frac{y(a)}{x-a}\right)_a^{(\infty)}}{\left(\frac{1}{x-a}\right)_a^{(\infty)}} = y(a) + (x-a)\,y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\,y''(a) + \ldots,$$

což není nic jiného, než Taylorova řada. Zde platí

$$\frac{\left(\frac{y(a)}{x-a}\right)_a^{(\infty)}}{\left(\frac{1}{x-a}\right)_a^{(\infty)}} = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\left(\frac{y(a)}{x-a}\right)_a^{(\nu)}}{\left(\frac{1}{x-a}\right)_a^{(\nu)}},$$

při čemž derivace řádu ν jsou vzaty podle proměnné a a x zůstává konstantní.

5. Máme-li stále na paměti větu vyslovenou na konci paragrafu 2, není zbytečné, připomenouti si její důkaz pro $n = 1$, to jest pro tečnu křivky, a podati její důkaz pro $n = 2$, čili v případě oskulační paraboly druhého řádu. V obou případech a také v případě obecném, jak uvidíme v dalším, užije se s úspěchem známé věty Stolzovy; tato věta dává zobecnění pravidla l'Hôpitalova pro výpočet pravé hodnoty neurčitého výrazu $\frac{\infty}{\infty}$ za předpokladu, že pouze jmenovatel se blíží nekonečnu pro mezní hodnotu x; pro nás je tato mezní hodnota nekonečno určitého daného znamení.[2])

Předpokládejme, že v rovnici tečny křivky (1)

$$Y = y'X + (y - xy'),$$

když při tom funkce $y = f(x)$ má stále derivaci konečnou, koeficienty y' a $y - xy'$ se blíží konečným limitám $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$ pro x rostoucí do nekonečna určitého znamení; jinými slovy, že rovnice (9) a (10) jsou podle předpokladu splněny. Použijeme-li věty Stolzovy, právě uvedené, na podíl $\frac{y}{x}$, dostaneme

$$\left[\frac{y}{x}\right]_\infty = \left[\frac{y'}{1}\right]_\infty = \varkappa_1,$$

---

[2]) O. Stolz: „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung", 1893, díl I., str. 77—79 12.

čili*)

$$\left[\frac{y}{x}\right]_\infty = \varkappa_1, \tag{18}$$

odkud plyne

$$\left[\frac{y}{x} - \varkappa_1\right]_\infty = 0.$$

Obdržíme tedy podle pravidla l'Hôpitalova a na základě rovnosti (10)

$$[y - \varkappa_1 x]_\infty = \left[\frac{\dfrac{y}{x} - \varkappa_1}{\dfrac{1}{x}}\right]_\infty = \left[\frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}\right]_\infty = [y - x y']_\infty = \varkappa_0,$$

čili

$$[y - \varkappa_1 x]_\infty = \varkappa_0. \tag{19}$$

Vyjadřuje tedy, vzhledem k rovnostem (18) a (19), přímka

$$y = \varkappa_1 x + \varkappa_0$$

v souhlase se vzorci (8) asymptotu křivky (1), což se mělo dokázati.

Uvažujme nyní rovnici obyčejné paraboly

$$Y = \frac{y''}{2} X^2 + (y' - xy'') X + \left(y - xy' + \frac{x^2 y''}{2}\right), \tag{20}$$

oskulující křivku (1), má-li při tom podle předpokladu funkce $y = f(x)$ pro x rostoucí do nekonečna konečnou druhou derivaci. Mimoto budeme předpokládati existenci konečných limit $\varkappa_2$, $\varkappa_1$, $\varkappa_0$, určených rovnostmi

$$\left[\frac{y''}{2}\right]_\infty = \varkappa_2, \tag{21}$$

$$[y' - xy'']_\infty = \varkappa_1, \tag{22}$$

$$\left[y - xy' + \frac{x^2 y''}{2}\right]_\infty = \varkappa_0. \tag{23}$$

Tyto limity nejsou nic jiného, než limity koeficientů v rovnici (20) oskulační paraboly pro x rostoucí do nekonečna. Použijeme-li věty Stolzovy na podíl $\dfrac{y}{x^2}$, obdržíme, vzhledem k rovnosti (21),

$$\left[\frac{y}{x^2}\right]_\infty = \left[\frac{y'}{2x}\right]_\infty = \left[\frac{y''}{2}\right]_\infty = \varkappa_2. \tag{24}$$

---

*) Je-li $n = 1$, obdržíme také z rovnice (10)

$$\left[\frac{y}{x} - y'\right]_\infty = 0, \quad \left[\frac{y}{x}\right]_\infty = [y']_\infty = \varkappa_1$$

i bez užití Stolzovy věty.

Máme tedy

$$\left[\frac{y}{x^2}\right]_\infty = \varkappa_2. \tag{25}$$

Tu pak, na základě rovnosti $\left[\frac{y'}{x} - 2\varkappa_2\right]_\infty = 0$, kterážto plyne z rovnic (24) a podle rovnosti (22), nám vyjde, použijeme-li na výraz $\frac{y - \varkappa_2 x^2}{x}$ nejprve věty Stolzovy a potom pravidla l'Hôpitalova,

$$\left[\frac{y - \varkappa_2 x^2}{x}\right]_\infty = \left[y' - 2\varkappa_2 x\right]_\infty = \left[\frac{\frac{y'}{x} - 2\varkappa_2}{\frac{1}{x}}\right]_\infty = \left[\frac{\left(\frac{y'}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\right]_\infty = [y' - xy'']_\infty = \varkappa_1.$$

Dostaneme tedy

$$\left[\frac{y - \varkappa_2 x^2}{x}\right]_\infty = \varkappa_1. \tag{26}$$

Mimo to dostaneme podle rovnic (24)

$$\left[\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} - \varkappa_2\right]_\infty = 2\varkappa_2 - \varkappa_2 - \varkappa_2 = 0.$$

Hledíme-li k této rovnosti a k rovnicím (26) a (23), vyjde nám, použijeme-li při tom na výraz $y - \varkappa_2 x^2 - \varkappa_1 x$ pravidla l'Hôpitalova,

$$[y - \varkappa_2 x^2 - \varkappa_1 x]_\infty = \left[\frac{\frac{y}{x} - \varkappa_2 x - \varkappa_1}{\frac{1}{x}}\right]_\infty = \left[\frac{\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} - \varkappa_2}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}\right]_\infty =$$

$$= \left[\frac{\frac{y''}{x} - \frac{2y'}{x^2} + \frac{2y}{x^3}}{\left(\frac{2}{x^3}\right)}\right]_\infty = \left[y - xy' - \frac{x^2 y''}{2}\right]_\infty = \varkappa_0.$$

Takto tedy obdržíme

$$[y - \varkappa_2 x^2 - \varkappa_1 x]_\infty = \varkappa_0. \tag{27}$$

Je tedy vzhledem k rovnicím (25), (26) a (27) a v souhlase se vzorci (8) pro případ $n = 2$, parabola

$$y = \varkappa_2 x^2 + \varkappa_1 x + \varkappa_0,$$

t. j. mezní poloha oskulační paraboly (20) křivky (1) pro x rostoucí do nekonečna, asymptotickou parabolou této křivky.

6. Dokážeme nyní tři pomocné věty.

a) Budiž $y = f(x)$ funkce mající konečnou derivaci řádu n a splňující, pro x rostoucí do nekonečna, rovnost

$$\left[\frac{y^{(n)}}{n!}\right]_\infty = \varkappa_n, \tag{28}$$

kde $\varkappa_n$ jest daná konstanta. Za tohoto předpokladu platí

$$\left[\frac{y}{x^n}\right]_\infty = \left[\frac{y'}{A_n^1\, x^{n-1}}\right]_\infty = \ldots = \left[\frac{y^{(n-i)}}{A_n^{n-i}\, x^i}\right]_\infty = \ldots = \left[\frac{y^{(n-1)}}{A_n^{n-1}\, x}\right]_\infty =$$
$$= \left[\frac{y^{(n)}}{A_n^n}\right]_\infty = \left[\frac{y^{(n)}}{n!}\right]_\infty = \varkappa_n, \tag{29}$$

při čemž A_n^l označuje počet variací l-té třídy z n prvků.

Tato věta se odvodí přímo z rovnosti (28), máme-li na paměti, že proměnná x roste do nekonečna a použijeme-li věty Stolzovy.

Důsledek. *Z rovnice* (28) *plynou rovnosti*

$$\left[\frac{y^{(n-i)}}{x^i}\right]_\infty = A_n^{n-i}\, \varkappa_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\; A_n^0 = 1,\; y^{(0)} = y). \tag{30}$$

Neboť na základě rovnic (29) platí

$$\left[\frac{y^{(n-i)}}{A_n^{n-i}\, x^i}\right]_\infty = \varkappa_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1, n),$$

odkud plyne rovnost (30), kterážto zůstává v platnosti také pro $i = n$, klademe-li $A_n^0 = 1$, $y^{(0)} = y$.

b) Budiž $y = f(x)$ funkce mající konečnou derivaci, když proměnná x roste do nekonečna a která vyhovuje rovnici (28). *Za těchto předpokladů platí*

$$\left[\frac{t_{i-1}\,(y^{(n-i)})}{x^i}\right]_\infty = -(-1)^i A_n^{n-i}\, \varkappa_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\; A_n^0 = 1,\; y^{(0)} = y). \tag{31}$$

Dostaneme pro $i = 1$, v souhlase s definicí operátoru t_ν vzorcem (13),

$$t_{1-1}\,(y^{(n-1)}) = t_0\,(y^{(n-1)}) = y^{(n-1)},$$

odkud plyne vzorec (31) pro $i = 1$; a to jest právě rovnost (30) v případě, že je $i = 1$. Budiž dále $i > 1$. Jako v dřívějším, položíme všude $0! = 1$ a $A_n^0 = 1$. Z definice operátoru t_ν plyne

$$t_{i-1}\,(y^{(n-i)}) = \sum_{\mu=0}^{\mu=i-1} \frac{(-x)^\mu\, y^{(n-i+\mu)}}{\mu!},$$

odkud plyne

$$\frac{t_{i-1}\,(y^{(n-i)})}{x^i} = \sum_{\mu=0}^{\mu=i-1} \frac{(-1)^\mu\, y^{(n-i+\mu)}}{\mu!\, x^{i-\mu}}.$$

Dostaneme tedy na základě rovností (30),

$$\left[\frac{y^{(n-i+\mu)}}{x^{i-\mu}}\right]_\infty = A_n^{n-(i-\mu)}\varkappa_n = A_n^{n-i+\mu}\varkappa_n = A_n^{n-i}A_i^\mu\varkappa_n.$$

Označíme-li tedy C_i^μ počet kombinací z i prvků μ-té třídy, nalezneme

$$\left[\frac{t_{i-1}(y^{(n-i)})}{x^i}\right]_\infty = A_n^{n-i}\sum_{\mu=0}^{\mu=i-1}\frac{(-1)^\mu A_i^\mu\varkappa_n}{\mu!} =$$

$$= A_n^{n-i}\varkappa_n\left[\sum_{\mu=0}^{\mu=i}(-1)^\mu C_i^\mu - (-1)^i\right] = A_n^{n-i}\varkappa_n\,[(1-1)^i - (-1)^i] =$$

$$= -(-1)^i A_n^{n-i}\varkappa_n,$$

což bylo dokázati.

c) *Aby parabola řádu n (n jest celé, kladné číslo)*

$$\eta = \varkappa_n x^n + \varkappa_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \varkappa_1 x + \varkappa_0, \tag{32}$$

jejíž pořadnice jest označena η, byla asymptotickou parabolou křivky

$$y = f(x) \tag{33}$$

jest nutno a stačí, aby parabola

$$\eta = \varkappa_{n-1}x^{n-1} + \varkappa_{n-2}x^{n-2} + \ldots + \varkappa_1 x + \varkappa_0 \tag{34}$$

byla asymptotická křivky

$$Y = y - \varkappa_n x^n, \tag{35}$$

kde y jest funkce definovaná rovnicí (33).

Neboť, aby parabola (32) byla asymptotická ke křivce (33), jest nutno a stačí, když funkce y splňuje identitu

$$y = \varkappa_n x^n + \varkappa_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \varkappa_1 x + \varkappa_0 + \alpha, \tag{36}$$

při čemž funkce $\alpha = \alpha(x)$ vyhovuje rovnosti

$$[\alpha(x)]_\infty = 0. \tag{37}$$

Avšak identita (36) jest ekvivalentní s identitou

$$y - \varkappa_n x^n = \varkappa_{n-1}x^{n-1} + x_{n-2}x^{n-2} + \ldots + \varkappa_1 x + \varkappa_0 + \alpha, \tag{38}$$

která dává s rovností (37) nutnou a postačující podmínku pro to, aby parabola (34) byla asymptotickou parabolou křivky (35). A tak rovnice (38) a (37) plynou ze souhrnu rovnic (36) a (37) a obráceně z rovnic (38) a (37) plyne souhrn rovnic (36) a (37), což dokazuje vyslovenou větu.

7. **Věta:** *Budiž*

$$y = f(x) \tag{39}$$

daná křivka, při čemž funkce $f(x)$ má podle předpokladu konečnou derivaci řádu n pro x rostoucí do nekonečna. Mimoto předpokládáme, že parabola řádu n

$$\left.\begin{aligned} \eta = \frac{t_0(y^{(n)})}{n!} \cdot X^n + \frac{t_1(y^{(n-1)})}{(n-1)!} \cdot X^{n-1} + \ldots + \\ + \frac{t_i(y^{(n-i)})}{(n-i)!} X^{n-i} + \ldots + \frac{t_{n-1}(y')}{1!} X + t_n(y), \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

oskulující křivku (39), *směřuje, pro x rostoucí do nekonečna, k limitní poloze; jinými slovy, že platí*

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{t_0(y^{(n)})}{n!}\right]_\infty = \left[\frac{y^{(n)}}{n!}\right]_\infty = \varkappa_n, \quad \left[\frac{t_1(y^{(n-1)})}{(n-1)!}\right]_\infty = \varkappa_{n-1} \ldots, \\ \left[\frac{t_i(y^{(n-i)})}{(n-i)!}\right]_\infty = \varkappa_{n-i}, \ldots, \left[\frac{t_{n-1}(y')}{1!}\right]_\infty = \varkappa_1, \ [t_n(y)]_\infty = \varkappa_0, \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

při čemž $\varkappa_n, \varkappa_{n-1}, \ldots, \varkappa_1, \varkappa_0$ *jsou daná čísla.*

Jest dokázati, že tato mezní poloha paraboly (40), *definovaná rovnicí*

$$y = \varkappa_n x^n + \varkappa_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \varkappa_1 x + \varkappa_0 \quad (42)$$

dává asymptotickou parabolu křivky (39).

Budiž n celé kladné číslo větší než 1. Předpokládejme, že věta platí pro oskulační parabolu řádu $n - 1$, t. j. připouštíme, že mezní poloha oskulační paraboly řádu $n-1$ libovolně dané křivky, když bod dotyku se vzdaluje do nekonečna, představuje (existuje-li vůbec taková mezná poloha) asymptotickou parabolu této křivky. Klademe si za úkol dokázati, že na základě tohoto předpokladu jest vyslovená věta správná také pro parabolu oskulační řádu n. To znamená dokázati, že na základě našeho předpokladu parabola (42), jejíž koeficienty $\varkappa_n, \varkappa_{n-1}, \ldots \varkappa_0$ jsou definovány vzorci (41), jest asymptotickou parabolou křivky (39). Abychom se o tom přesvědčili, stačí podle věty c) paragrafu 6 dokázati, že na základě rovností (41) je parabola

$$y = \varkappa_{n-1} x^{n-1} + \varkappa_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \varkappa_1 x + \varkappa_0 \quad (43)$$

asymptotickou parabolou křivky

$$Y = y - \varkappa_n x^n, \quad (44)$$

a proto stačí, podle našeho předpokladu dokázati, že rovnice (41) mají za následek rovnosti

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{t_0(Y^{(n-1)})}{(n-1)!}\right]_\infty = \left[\frac{Y^{(n-1)}}{(n-1)!}\right]_\infty = \varkappa_{n-1}, \quad \left[\frac{t_1(Y^{(n-2)})}{(n-2)!}\right]_\infty = \varkappa_{n-2}, \ldots, \\ \left[\frac{t_{i-1}(Y^{(n-i)})}{(n-i)!}\right]_\infty = \varkappa_{n-i}, \ldots, \left[\frac{t_{n-2}(Y')}{1!}\right]_\infty = \varkappa_1, \ [t_{n-1}(Y)]_\infty = \varkappa_0, \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

při čemž Y označuje všude funkci $y - \varkappa_n x^n$ a čísla $\varkappa_i$ ($i = n, n-1, \ldots, 1, 0$) jsou definována rovnicemi (41). Pišme k tomu cíli výraz

$$\frac{t_0(Y^{(n-1)})}{(n-1)!},$$

který stojí v první z rovností (45), v tvaru

$$\frac{t_0\,(Y^{(n-1)})}{(n-1)!}=\frac{Y^{(n-1)}}{(n-1)!}=\frac{(y-\varkappa_n\,x^n)^{(n-1)}}{(n-1)!}=\frac{\dfrac{y^{(n-1)}}{x}-A_n^{n-1}\,\varkappa_n}{(n-1)!\,\dfrac{1}{x}}.$$

Mimoto, na základě první z rovnic (41) dostaneme, podle vzorce (30) v důsledku pomocné věty a):

$$\left[\frac{y^{(n-1)}}{x}-A_n^{n-1}\,\varkappa_n\right]_\infty=0.$$

Použijeme-li tedy pravidla l'Hôpitalova a máme-li na paměti druhou z rovností (41), dostaneme

$$\left[\frac{t_0\,(Y^{(n-1)})}{(n-1)!}\right]_\infty=\left[\frac{\dfrac{y^{(n-1)}}{x}-A_n^{n-1}\,\varkappa_n}{(n-1)!\,\dfrac{1}{x}}\right]_\infty=\left[\frac{\left(\dfrac{y^{(n-1)}}{x}\right)'}{(n-1)!\left(\dfrac{1}{x}\right)'}\right]_\infty=$$

$$=\left[\frac{y^{(n-1)}-xy^{(n)}}{(n-1)!}\right]_\infty=\left[\frac{t_1\,(y^{(n-1)})}{(n-1)!}\right]_\infty=\varkappa_{n-1}.$$

Tím je první rovnost (45) dokázána. Budiž dále

$$\left[\frac{t_{i-1}\,(Y^{(n-i)})}{(n-i)!}\right]_\infty=\varkappa_{n-i} \tag{46}$$

jedna ze zbývajících rovností (45), při čemž index i má jednu z hodnot $2, 3, \ldots, n$. Podle vzorce (15) a (16), klademe-li v tomto posledním vzorci $\nu=i-1$, $z=x^i$, obdržíme

$$t_{i-1}\,(Y^{(n-i)})=t_{i-1}\,[(y-\varkappa_n\,x^n)^{(n-i)}]=t_{i-1}\,(y^{(n-i)}-A_n^{n-i}\,\varkappa_n\,x^i)=$$

$$=t_{i-1}\,(y^{(n-i)})-A_n^{n-i}\,\varkappa_n\,t_{i-1}\,(x^i),$$

$$t_{i-1}\,(x^i)=\frac{(-1)^{i-1}\left(\dfrac{x^i}{x}\right)^{(i-1)}x^i}{(i-1)!}=(-1)^{i-1}\,x^i,$$

odkud plyne

$$t_{i-1}\,(Y^{(n-i)})=t_{i-1}\,(y^{(n-i)})+(-1)^i\,A_n^{n-i}\,\varkappa_n\,x^i.$$

Tudíž, máme-li na zřeteli identity

$$\frac{t_{i-1}\,(Y^{(n-i)})}{(n-i)!}=\frac{t_{i-1}\,(y^{(n-i)})+(-1)^i\,A_n^{n-i}\,\varkappa_n\,x^i}{(n-i)!}=$$

$$=\frac{\dfrac{t_{i-1}\,(y^{(n-i)})}{x^i}+(-1)^i\,A_n^{n-i}\,\varkappa_n}{\dfrac{1}{x^i}\,(n-i)!},$$

rovnost

$$\left[\frac{t_{i-1}(y^{(n-i)})}{x^i} + (-1)^i A_n^{n-i} \varkappa_n\right]_\infty = 0,$$

která plyne ze vzorce (31) pomocné věty b), rovnost

$$\left[\frac{t_{i-1}(y^{(n-i)})}{x^i}\right]' = -\frac{i t_i(y^{(n-i)})}{x^{i+1}},$$

již nalezneme, klademe-li ve vzorci (17) $\nu = i$ a $z = y^{(n-i)}$ a rovnici

$$\left[\frac{t_i(y^{(n-i)})}{(n-i)!}\right]_\infty = \varkappa_{n-i},$$

vhodně zvolenou z daných rovnic, dostaneme v souhlase s pravidlem l'Hôpitalovým

$$\left[\frac{t_{i-1}(Y^{(n-i)})}{(n-i)!}\right]_\infty = \left[\frac{\dfrac{t_{i-1}(y^{(n-i)})}{x^i} + (-1)^i A_n^{n-i}\varkappa_n}{\dfrac{1}{x^i}\cdot(n-i)!}\right]_\infty =$$

$$= \left[\frac{\left\{\dfrac{t_{i-1}(y^{(n-i)})}{x^i}\right\}'}{(n-i)!\left(\dfrac{1}{x^i}\right)'}\right]_\infty = \left[\frac{\dfrac{-t_i(y^{(n-i)})}{x^{i+1}}}{\dfrac{-i}{x^{i+1}}(n-i)!}\right]_\infty = \left[\frac{t_i(y^{(n-i)})}{(n-i)!}\right]_\infty = \varkappa_{n-i},$$

což není nic jiného, než rovnost (46). Tím jsou všecky rovnosti (45) dokázány. Rovnosti (45) vyplývají tedy z rovností (41); z toho plyne, že vyslovená věta platí pro oskulační parabolu řádu n, platí-li pro oskulační parabolu řádu $n-1$. Viděli jsme však (§ 5), že tato věta platí pro $n = 1$ a pro $n = 2$, platí tudíž pro libovolné celé kladné číslo n.

Poznámka. Dokázaná věta dává postačující podmínku pro existenci asymptotické paraboly řádu n vzhledem ke křivce $y = f(x)$. V dalším uvidíme, že tato podmínka není nutná.

8. Příklady. 1. Derivujeme-li postupně rovnici křivky

$$y = 6x^3 e^{-\frac{1}{x}} + e^{-x}, \tag{47}$$

dostaneme

$$\left.\begin{aligned} y' = (18x^2 + 6x)e^{-\frac{1}{x}} - e^{-x},\quad y'' = \left(36x + \frac{6}{x} + 24\right)e^{-\frac{1}{x}} + e^{-x}, \\ y''' = \left(36 + \frac{18}{x^2} + \frac{36}{x} + \frac{6}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}} - e^{-x}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Když x roste do nekonečna čísly kladnými, dostaneme

$$\left[\frac{t_0(y''')}{3!}\right]_{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{t_0(y''')}{3!} = \left[\frac{y'''}{3!}\right]_{+\infty} = 6. \tag{49}$$

Podle rovnic (48) nám dále vyjde

$$t_1(y'') = y'' - xy''' = -\left(12 + \frac{12}{x} + \frac{6}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} + (1 + x)e^{-x},$$

$$t_2(y') = y' - xy'' - \frac{x^2 y'''}{2} = \left(3 + \frac{3}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x},$$

$$t_3(y) = y - xy' + \frac{x^2 y''}{2} - \frac{x^3 y'''}{6} = -e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)e^{-x},$$

odkud vyplývá

$$\left[\frac{t_1(y'')}{2!}\right]_{+\infty} = -6, \quad \left[\frac{t_2(y')}{1!}\right]_{+\infty} = 3, \quad [t_3(y)]_{+\infty} = 1. \tag{50}$$

Má tudíž, vzhledem ke vzorcům (49) a (50), křivka (47), v souhlase s větou dříve dokázanou, asymptotickou parabolu třetího stupně

$$y = 6x^3 - 6x^2 + 3x - 1,$$

která se neomezeně blíží uvažované křivce, když x roste do nekonečna kladnými čísly. Tato parabola je zároveň shodná s meznou polohou oskulační paraboly třetího stupně ke křivce (47), když bod dotyku se vzdaluje do nekonečna v kladném smyslu osy x. Chceme-li prostě nalézti nějakou asymptotickou parabolu uvažované křivky, stačí násobiti výrazem $6x^3$ v rovnici (47) rozvoj funkce $e^{-\frac{1}{x}}$ v řadu postupující podle mocnin $\frac{1}{x}$, isolujeme-li při tom v součinu členy obsahující nikoliv negativní mocniny x a přihlížíme-li k rovnosti

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0.$$

2. Uvažujme dále křivku

$$y = 2x^2 + \frac{\sin x^2}{x^2}. \tag{51}$$

Platí

$$\left[\frac{\sin x^2}{x^2}\right]_{\infty} = 0,$$

když x se blíží do nekonečna ať ve smyslu kladném, či záporném. Je tedy parabola

$$y = 2x^2$$

asymptotickou parabolou křivky (51) v obou smyslech osy x do nekonečna. Avšak, když x roste do nekonečna, tato asymptotická parabola není limitní polohou oskulační paraboly (20) druhého stupně, sestrojené pro křivku (51). Neboť derivujeme-li dvakrát rovnici (51), obdržíme

$$y'' = 4 - \frac{6\cos x^2}{x^2} + \frac{6\sin x^2}{x^4} - 4\sin x^2.$$

Pro x rostoucí do nekonečna (kladnými nebo zápornými čísly), nám vyjde

$$\left[4 - \frac{6\cos x^2}{x^2} + \frac{6\sin x^2}{x^4}\right]_\infty = 4,$$

kdežto člen $(-4\sin x^2)$ se neblíží žádné limitě. Nemá tudíž funkce y'', a stejně funkce

$$\frac{t_0(y'')}{2!} = \frac{y''}{2},$$

určité limity pro x rostoucí do nekonečna. Proto v tomto případě oskulační parabola (20) druhého stupně, když bod dotyčný se vzdaluje do nekonečna, nesměřuje k žádné limitní poloze. Vidíme tedy, že věta v paragrafu 7 dává postačující podmínku pro existenci asymptotické paraboly, avšak tato podmínka není obecně nutná.

Poznámka. 1. Interpretovali jsme rovnice křivek a asymptotických parabol těchto křivek v souřadnicích pravoúhlých nebo kosoúhlých. Můžeme rozšířiti tuto interpretaci analogicky na jiné soustavy souřadné, na př. na souřadnice polární.

2. Při definování asymptotické paraboly řádu n bylo předpokládáno, že koeficient $\varkappa_n$ prvního členu na pravé straně rovnice (3) jest různý od nuly. Avšak tento předpoklad nevystupuje vůbec ani v textu ani v důkaze věty paragrafu 7, ani ve zvláštních případech této věty pro $n = 1$ a pro $n = 2$, uvažovaných v paragrafu 5. Můžeme tedy dokazovati tuto větu bez jakéhokoliv omezení koeficientu $\varkappa_n$ v definici asymptotické paraboly. V případě, že platí

$$\varkappa_n = \varkappa_{n-1} = \ldots = \varkappa_{m+1} = 0, \quad \varkappa_m \neq 0 \quad (0 < m < n),$$

zjistíme pomocí této věty existenci asymptotické paraboly

$$\eta = \varkappa_m x^m + \varkappa_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \varkappa_1 x + \varkappa_0.$$

Může se dokonce státi, že všecka čísla $\varkappa_i$ ve vzorcích (41) jsou rovna nule. V tom případě osa x jest asymptotou křivky.

*

Sur les paraboles asymptotiques.

(Extrait de l'article précédent.)

Nous nommerons la courbe

$$\eta = \varkappa_n x^n + \varkappa_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \varkappa_1 x + \varkappa_0,$$

n étant un entier positif, $\varkappa_n, \varkappa_{n-1}, \ldots, \varkappa_1, \varkappa_0$ étant des constantes données et η désignant l'ordonnée de cette courbe, *parabole asympto-*

tique de la courbe

$$y = f(x),$$

si l'on a

$$\lim (y - \eta) = \lim [f(x) - \varkappa_n x^n - \varkappa_{n-1} x^{n-1} - \ldots - \varkappa_0]_\infty = 0,$$

où le symbole ∞ désigne l'infini d'un signe donné.

En supposant que la fonction $f(x)$ ait pour x croissant à l'infini une dérivée finie d'ordre n, on peut construire en chaque point de la courbe $y = f(x)$ une parabole osculatrice d'ordre n en général [voir les équations (11) et (12) du texte].

Le théorème de Stolz sur la vraie valeur d'un quotient indéterminé[1]) permet de démontrer la proposition suivante (§ 7 du texte): *Si une parabole osculatrice d'ordre n à la courbe $y=f(x)$, le point du contact s'éloignant à l'infini, tend vers une position limite, cette position limite représente une parabole asymptotique de la courbe considérée.* La proposition réciproque n'est pas vraie en général [cf. § 8 du texte, exemple 2].

La proposition énoncée plus haut n'est qu'une généralisation d'un théorème bien connu qui exprime la liaison entre la tangente et l'asymptote (droite asymptotique) d'une courbe.

---

[1]) O. Stolz: „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung" 1893, T. I, p. p. 77—79, § 12.