Josef Kaucký

O jistém zobecnění Bernoulliových a Eulerových polynomů

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 305--312

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121380

O jistém zobecnění Bernoulliových a Eulerových polynomů.

Jos. Kaucký.

1. Buďtež $\omega, \omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ libovolné parametry, n kladné celé číslo. Uvažujme polynomy $J^{(n)}_{\nu,\omega}(x | \omega_1, \omega_2, \dots \omega_n)$ řádu n, stupně ν definované rozvojem

$$(1 + \omega t)^{\frac{x}{\omega}} \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{(1 + \omega t)^{\frac{\omega_k}{\omega}} + 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} J^{(n)}_{\nu,\omega} (x | \omega_1, \omega_2, \dots \omega_n), \tag{1}$$

platícím pro dosti malé hodnoty $|t|$.

Tyto funkce, které krátce označíme $J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$ a pro něž je tedy výraz v (1) vytvořující funkcí, lze však definovati ještě jinak. Označíme-li totiž

$$\underset{\omega}{\nabla} f(x) = \frac{f(x + \omega) + f(x)}{2},$$

$$\underset{\omega_1\omega_2\dots\omega_n}{\overset{n}{\nabla}} f(x) = \underset{\omega_n}{\nabla} \left\{ \underset{\omega_1\omega_2\dots\omega_{n-1}}{\overset{n-1}{\nabla}} f(x) \right\}$$

a přihlédneme-li ke vzorci

$$(1 + \omega t)^{\frac{x}{\omega}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} x(x - \omega) \dots (x - \nu\omega + \omega), \tag{2}$$

dostáváme aplikací operace $\underset{\omega_1\omega_2\dots\omega_n}{\overset{n}{\nabla}}$ na obě strany rovnice (1), funkcionální rovnici

$$\underset{\omega_1\omega_2\dots\omega_n}{\overset{n}{\nabla}} J^{(n)}_{\nu,\omega}(x) = x(x - \omega) \dots (x - \nu\omega + \omega), \tag{3}$$

která pro nezáporná a celá ν polynomy $J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$ úplně určuje. Je zřejmě na př. $J^{(n)}_{0,\omega}(x) = 1$.

2. Abychom obdrželi další vlastnosti našich polynomů, zaveďme tyto symboly

$$\underset{\omega}{\Delta} f(x) = \frac{f(x + \omega) - f(x)}{\omega},$$

$$\mathop{\Delta}^{n}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n} f(x) = \mathop{\Delta}_{\omega_n}\left\{\mathop{\Delta}^{n-1}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_{n-1}} f(x)\right\},$$

$$\mathop{\Delta}^{n}_{\omega} f(x) = \mathop{\Delta}_{\omega}\left\{\mathop{\Delta}^{n-1}_{\omega} f(x)\right\};$$

aplikací operace $\mathop{\Delta}^{p}_{\omega}$ na obě strany (1), získáváme rovnici

$$\mathop{\Delta}^{p}_{\omega} J^{(n)}_{\nu,\omega}(x) = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-p+1)\, J^{(n)}_{\nu-p,\omega}(x). \tag{4}$$

Tuto rovnici ovšem stejně snadno obdržíme z druhé definice funkcí $J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$, totiž z rovnice (3). Uvážíme-li jen, že je

$$\begin{aligned}\mathop{\Delta}^{p}_{\omega} x(x-\omega)\ldots(x-\nu\omega+\omega) &= \\ &= \nu(\nu-1)\ldots(\nu-p+1)\, x(x-\omega)\ldots(x-\overline{\nu-p}\,\omega+\omega),\end{aligned} \tag{5}$$

že dále zřejmě platí

$$\mathop{\Delta}^{p}_{\omega}\left\{\mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n} J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)\right\} = \mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}\left\{\mathop{\Delta}^{p}_{\omega} J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)\right\},$$

máme aplikací operace $\mathop{\Delta}^{p}_{\omega}$ na obě strany (3), rovnici

$$\begin{aligned}\mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}\left\{\frac{1}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-p+1)}\mathop{\Delta}^{p}_{\omega} J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)\right\} &= \\ = x(x-\omega)\ldots(x-\overline{\nu-p}\,\omega+\omega).\end{aligned}$$

Rovnice (3) určuje však funkce $J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$ jednoznačně, takže vztah (4) je evidentní.

Rovnice (4) nám snadno dopomůže k rekurentní formuli, z níž lze všechny polynomy $J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$ počítati.

Než však přistoupíme k odvození této formule, všimněme si ještě jedné důležité vlastnosti našich polynomů, rovněž z (1) nebo (3) snadno plynoucí. Lze totiž (3) psáti ve tvaru

$$\mathop{\nabla}^{n-p}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_{n-p}}\left\{\mathop{\nabla}^{p}_{\omega_{n-p+1}\ldots\omega_n} J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)\right\} = x(x-\omega)\ldots(x-\nu\omega+\omega),$$

takže

$$\mathop{\nabla}^{p}_{\omega_{n-p+1}\ldots\omega_n} J^{(n)}_{\nu,\omega}(x) = J^{(n-p)}_{\nu,\omega}(x); \tag{6}$$

tedy na př.

$$\mathop{\nabla}_{\omega_n} J^{(n)}_{\nu,\omega}(x) = J^{(n-1)}_{\nu,\omega}(x). \tag{6'}$$

Doplňme v souhlase s rovnicí (3) definici funkcí $J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$ požadavkem

$$J^{(0)}_{\nu,\omega}(x) = x(x-\omega)\ldots(x-\nu\omega+\omega). \tag{7}$$

Budiž nyní $P(x)$ polynom stupně ν; $P(x)$ lze psáti ve tvaru

$$P(x) = \sum_{s=0}^{\nu} \frac{x(x-\omega)\dots(x-s\omega+\omega)}{s!} \mathop{\Delta}_{\omega}^{s} P(0).$$

V našem případě máme tudíž s ohledem na vztah (4)

$$J^{(n)}_{\nu,\omega}(x+y) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} y(y-\omega)\dots(y-s\omega+\omega) J^{(n)}_{\nu-s,\omega}(x),$$

odkud pro $y = \omega_n$ a pomocí (6′) získáváme hledanou formuli

$$J^{(n-1)}_{\nu,\omega}(x) = J^{(n)}_{\nu,\omega}(x) + \tfrac{1}{2} \sum_{s=1}^{\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n(\omega_n-\omega)\dots(\omega_n-s\omega+\omega) J^{(n)}_{\nu-s,\omega}(x). \tag{8}$$

3. Budiž n opět kladné celé číslo. Polynomy záporného řádu $J^{(-n)}_{\nu,\omega}(x|\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n)$, které budeme krátce označovati $J^{(-n)}_{\nu,\omega}(x)$ definujeme vytvořující funkcí

$$(1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}} \prod_{k=1}^{n} \frac{(1+\omega t)^{\frac{\omega_k}{\omega}}+1}{2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} J^{(-n)}_{\nu,\omega}(x). \tag{9}$$

Poněvadž je

$$\mathop{\nabla}_{\omega_k} (1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}} = (1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}} \frac{(1+\omega t)^{\frac{\omega_k}{\omega}}+1}{2},$$

je patrně levá strana v (9) rovna

$$\mathop{\nabla}_{\omega_1\omega_2\dots\omega_n}^{n} (1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}},$$

takže, přihlédneme-li ke vztahu (2), máme rovnici, z níž porovnáním koeficientů vychází

$$J^{(-n)}_{\nu,\omega}(x) = \mathop{\nabla}_{\omega_1\omega_2\dots\omega_n}^{n} x(x-\omega)\dots(x-\nu\omega+\omega). \tag{10}$$

5. Zvláštní zmínky zasluhuje případ $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 1$. V tomto speciálním případě označme naše polynomy $\bar{J}^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$. Je patrně pro n celé

$$(1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}} \left\{ \frac{2}{(1+\omega t)^{\frac{1}{\omega}}+1} \right\}^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \bar{J}^{(n)}_{\nu,\omega}(x). \tag{11}$$

Pro tyto funkce lze následujícím způsobem odvoditi jednoduchou rekurentní formuli.

Označme

$$B = 1+\omega t, \quad A = \frac{2}{B^{\frac{1}{\omega}}+1}$$

a derivujme rovnici (11) podle t. Po jednoduchém počtu dospějeme k rovnici

$$-n A^{n+1} B^{\frac{x+1}{\omega}} + 2x A^n B^{\frac{x}{\omega}} = 2(1+\omega t) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \bar{J}^{(n)}_{\nu,\omega}(x).$$

Avšak

$$A^n B^{\frac{x}{\omega}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \bar{J}^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$$

$$A^{n+1} B^{\frac{x+1}{\omega}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \bar{J}^{(n+1)}_{\nu,\omega}(x+1)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \left\{ -\bar{J}^{(n+1)}_{\nu,\omega}(x) + 2\bar{J}^{(n)}_{\nu,\omega}(x) \right\},$$

neboť rovnice (6') v našem případě dává

$$\nabla \bar{J}^{(n+1)}_{\nu,\omega}(x) = \bar{J}^{(n)}_{\nu,\omega}(x).^{1)}$$

Vložíme-li odtud do rovnice (12), máme porovnáním koeficientů u t^ν vztah

$$n \bar{J}^{(n+1)}_{\nu,\omega}(x) = 2\bar{J}^{(n)}_{\nu+1,\omega}(x) - 2(x - n - \nu\omega) \bar{J}^{(n)}_{\nu,\omega}(x);$$

pro $n = 0$ dává tato rovnice triviální vztah

$$\bar{J}^{(0)}_{\nu+1,\omega}(x) = (x - \nu\omega) \bar{J}^{(0)}_{\nu,\omega}(x),$$

pro $n \neq 0$ vychází

$$\bar{J}^{(n)}_{\nu,\omega}(x) = \frac{2}{n} \bar{J}^{(n)}_{\nu+1,\omega}(x) - \frac{2}{n}(x - n - \nu\omega) \bar{J}^{(n)}_{\nu,\omega}(x). \tag{12}$$

4. Pro $\omega \to 0$ přecházejí rovnice (1) a (9) v následující

$$\frac{2^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t}+1)(e^{\omega_2 t}+1)\dots(e^{\omega_n t}+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} J^{(n)}_{\nu,0}(x)$$

$$\frac{(e^{\omega_1 t}+1)(e^{\omega_2 t}+1)\dots(e^{\omega_n t}+1)}{2^n} e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} J^{(-n)}_{\nu,0}(x),$$

takže pro n celé

$$J^{(n)}_{\nu,0}(x) = E^{(n)}_\nu(x),$$

kde $E^{(n)}_\nu(x)$ jsou Euler-Nörlundovy polynomy[2]).

---

[1]) Pro $\omega = 1$ místo $\underset{1}{\nabla}$ a $\underset{1}{\Delta}$ píšeme ∇, Δ a obecně $\overset{n}{\Delta}$, $\overset{n}{\nabla}$, pro $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 1$.

[2]) Mémoire sur les polynomes de Bernoulli, Acta mat., t. 43.

Rovnice (3) pro $\omega = 0$ dává

$$\mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n} E_\nu^{(n)}(x) = x^\nu,$$

ze (4) máme

$$D_x^p E_\nu^{(n)}(x) = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-p+1)E_{\nu-p}^{(n)}(x),$$

rovnice (8) se redukuje na

$$E_\nu^{(n-1)}(x) = E_\nu^{(n)}(x) + \tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{\nu}\binom{\nu}{s}\omega_n^s E_{\nu-s}^{(n)}(x),$$

ve speciálním případě $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 1$ je

$$E_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{2}{n}E_{\nu+1}^{(n)}(x) - \frac{2}{n}(x-n)E_\nu^{(n)}(x).$$

5. Obraťme se nyní k vyšetření polynomů $K_{\nu,\omega}^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$ řádu n (n kladné celé číslo) a stupně ν, které budeme krátce značiti $K_{\nu,\omega}^{(n)}(x)$. Rovněž budeme psáti $K_{\nu,\omega}^{(n)}$ místo $K_{\nu,\omega}^{(n)}(0)$.

Tyto polynomy definujeme vytvořující funkcí

$$(1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}} \prod_{k=1}^{n} \frac{t\omega_k}{(1+\omega t)^{\frac{\omega_k}{\omega}} - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} K_{\nu,\omega}^{(n)}(x)\,; \tag{13}$$

rozvoj platí pro dosti malé hodnoty $|t|$.

Pro funkce $K_{\nu,\omega}^{(n)}(x)$ platí podobná formule jako je (8). Odvodíme ji stejně snadno. Všimněme si za tím účelem, že platí vztahy

$$\mathop{\Delta}^{p}_{\omega} K_{\nu,\omega}^{(n)}(x) = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-p+1)\,K_{\nu-p,\omega}^{(n)}(x) \tag{14}$$

$$\mathop{\Delta}_{\omega_n} K_{\nu,\omega}^{(n)}(x) = \nu K_{\nu-1,\omega}^{(n-1)}(x). \tag{15}$$

Je tedy

$$K_{\nu,\omega}^{(n)}(x+y) = \sum_{s=0}^{\nu}\binom{\nu}{s} y(y-\omega)\ldots(y-s\omega+\omega)\,K_{\nu-s,\omega}^{(n)}(x),$$

odkud pro $y = \omega_n$ vychází

$$\sum_{s=1}^{\nu}\binom{\nu}{s}\omega_n(\omega_n-\omega)\ldots(\omega_n-s\omega+\omega)\,K_{\nu-s,\omega}^{(n)}(x) = \omega_n \nu K_{\nu-1,\omega}^{(n-1)}(x). \tag{16}$$

Z rovnice této lze počítati polynomy řádu n, známe-li polynomy řádu $n-1$.

Obraťme se nyní k jiné definici funkcí $K_{\nu,\omega}^{(n)}(x)$. Z rovnice (13) vidíme předně, že je

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\mathop{\Delta}^{n}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n} K_{\nu,\omega}^{(n)}(x) = t^n(1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}},$$

odkud je patrno, že funkce $K^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$ je řešením funkcionální rovnice

$$\underset{\omega_1\omega_2\dots\omega_n}{\overset{n}{\Delta}} K^{(n)}_{\nu,\omega}(x)=\nu(\nu-1)\dots(\nu-n+1)\,x(x-\omega)\dots(x-\overline{\nu-n}\,\omega+\omega). \tag{17}$$

Pro $n=1$ je na př.

$$\underset{\omega_1}{\Delta} K^{(1)}_{\nu,\omega}(x)=\nu x(x-\omega)\dots(x-\overline{\nu-2}\,\omega). \tag{18}$$

Hledáme-li však polynom hovící této rovnici, vidíme, že je stupně ν a že jen tehdy touto rovnicí jednoznačně stanoven, známe-li jeho hodnotu v nějakém čísle na př. $x=0$. Definujme tedy funkce $K^{(1)}_{\nu,\omega}(x)$ jako polynomická řešení rovnice (18) s požadavkem

$$K^{(1)}_{\nu,\omega}=\frac{\omega^{\nu-1}}{\omega_1}\,\nu!\,\Lambda_\nu\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right), \tag{19}$$

kde $\Lambda_\nu(x)$ je ν-tý Lubbockův polynom.

Jak známo[3]), jsou Lubbockovy polynomy koeficienty v rozvoji

$$\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{q}}-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}x^\nu\Lambda_\nu(q);$$

položíme-li $x=\omega t$, $q=\omega/\omega_1$ a násobíme-li celou rovnici ω_1/ω, obdržíme

$$\frac{t\omega_1}{(1+\omega t)^{\frac{\omega_1}{\omega}}-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\left\{\nu!\frac{\omega^{\nu-1}}{\omega_1}\Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\right\}.$$

Odtud je patrno, že náš požadavek (19) je oprávněný, jelikož výraz na levé straně poslední rovnice je, jak patrno z (13), právě vytvořující funkce pro číslo $K^{(1)}_{\nu,\omega}$.

Poněvadž tedy známe $K^{(1)}_{\nu,\omega}$, známe z formule (16) všechna čísla $K^{(n)}_{\nu,\omega}$ a dokončení druhé definice polynomů $K^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$ je již snadné.

V souhlase s (15) definujeme funkce $K^{(2)}_{\nu,\omega}(x)$ opět jako polynomy hovící rovnici

$$\underset{\omega_2}{\Delta} K^{(2)}_{\nu,\omega}(x)=\nu K^{(1)}_{\nu-1,\omega}(x) \tag{20}$$

a podmínce

$$K^{(2)}_{\nu,\omega}(0)=K^{(2)}_{\nu,\omega} \tag{20'}$$

a obecně $K^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$ je polynom hovící rovnici

$$\underset{\omega_n}{\Delta} K^{(n)}_{\nu,\omega}(x)=\nu K^{(n-1)}_{\nu-1,\omega}(x) \tag{21}$$

---

[3]) Viz na př. Galbrun H., Assurance sur la vie. Calcul de primes, p. 87, Paris, 1924.

s podmínkou, že

$$K^{(n)}_{\nu,\omega}(x) = K^{(n)}_{\nu,\omega}, \tag{21'}$$

kde čísla $K^{(n)}_{\nu,\omega}$ jsou dána rekurentní formulí z (16) pro $x = 0$ plynoucí.

Je také patrno, že platí naše vývody pro $n = 0$, klademe-li

$$K^{(n)}_{\nu,\omega}(x) = x(x-\omega)\ldots(x-\nu\omega+\omega). \tag{22}$$

Z rovnice (16) lze tedy snadno všechny polynomy $K^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$ počítati.

6. Budiž n kladné celé číslo. Polynomy záporného řádu $K^{(-n)}_{\nu,\omega}(x \mid \omega_1 \ldots \omega_n)$ čili krátce $K^{(-n)}_{\nu,\omega}(x)$ definujeme rozvojem

$$(1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}} \prod_{k=1}^{n} \frac{(1+\omega t)^{\frac{\omega_k}{\omega}} - 1}{t\omega_k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} K^{(-n)}_{\nu,\omega}(x). \tag{23}$$

Poněvadž tuto rovnici lze psáti ve tvaru

$$\frac{1}{t^n} \mathop{\Delta}^{n}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n} (1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} K^{(-n)}_{\nu,\omega}(x),$$

je patrně se zřetelem ku (2)

$$K^{(-n)}_{\nu,\omega}(x) = \frac{\nu!}{(n+\nu)!} \mathop{\Delta}^{n}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n} x(x-\omega)\ldots[x-(n+\nu)\omega+\omega]. \tag{24}$$

7. Přejděme k $\omega \to 0$. Rovnice (13) a (23) přejdou v následující

$$\frac{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n t^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t}-1)(e^{\omega_2 t}-1)\ldots(e^{\omega_n t}-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} K^{(n)}_{\nu,0}(x)$$

$$\frac{(e^{\omega_1 t}-1)(e^{\omega_2 t}-1)\ldots(e^{\omega_n t}-1)}{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n t^n} e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} K^{(-n)}_{\nu,0}(x).$$

Je tedy

$$K^{(n)}_{\nu,0}(x) = B^{(n)}_\nu(x)$$

kde $B^{(n)}_\nu(x)$ jsou Bernoulli-Nörlundovy polynomy[4]).

Pro $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = 1$ označme naše funkce $\overline{K}^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$. Pak je pro n celé

$$\frac{t^n}{\left[(1+\omega t)^{\frac{1}{\omega}} - 1\right]^n} (1+\omega t)^{\frac{x}{\omega}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \overline{K}^{(n)}_{\nu,\omega}(x),$$

odkud vychází, že je

$$\overline{K}^{(n)}_{\nu,\omega}(x) = x^{\nu}_{\omega n},$$

[4]) loc. cit.

kde $x^{\nu}_{\omega n}$ jsou Steffensenovy polynomy[5]). Pro $n = 1$, $\omega_1 = 1$, $\omega = 0$, $t = z$, $B^{(1)}_{\nu,0}(x) = \varphi_\nu(x)$ dostáváme z (13) vytvořující funkci pro Bernoulliovy polynomy

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \varphi_0(x) + z\varphi_1(x) + \ldots {}^{6})$$

Poznámka při korektuře. Pro $\omega = \alpha$, $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \beta$ máme z (13) rovnici

$$\frac{\beta^n t^n (1 + \alpha t)^{\frac{x}{\alpha}}}{[(1 + \alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}} - 1]^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu L^{(n)}_\nu (x;\ \alpha,\ \beta),$$

kde $L^{(n)}_\nu (x;\ \alpha,\ \beta)$ jsou Lagrangeovy polynomy. R. Lagrange pojednává o nich a o polynomech ještě obecnějších v dlouhém článku „Mémoire sur les suites de polynomes".[7])

V předcházejícím článku omezil jsem se pro nedostatek místa pouze na definice a odvození několika základních vět o funkcích $J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$ a $K^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$. K dalším vlastnostem, z nichž mnohé jsem uvedl v přednášce o Bernoulliových funkcích, kterou právě konám na přírodovědecké fakultě v Brně, obrátím se v článku jiném.

*

Sur une généralisation des polynomes de Bernoulli et d'Euler.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur indique quelques propriétés des polynomes définis par les génératrices (1), (9), (11), (13), (23). Il est évident que les fonctions $J^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$, $K^{(n)}_{\nu,\omega}(x)$ donnent, dans les cas speciaux des paramètres ω, ω_1, ω_2, ... ω_n, les polynomes d'Euler, de Bernoulli, de Nörlund, et de Steffensen.[8])

---

[5]) Steffenson J. F.: On a generalization of Nörlund's polynomials, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Math.—fys. Meddelalser. VII. 5. 1926.

[6]) Petr K.: Počet integrální, str. 133, Praha 1915.

[7]) Acta matematica, t. 51, p. 201—309.

[8]) Voir les citations dans le texte.