Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Čupr

# Použití signatury kvadratických forem v nauce o algebraických rovnicích

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 217--225

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121368

# Použití signatury kvadratických forem v nauce o algebraických rovnicích.

*Karel Čupr.*

V této stati chceme aplikovati výsledky, k nimž jsme ve článku „Zobecnění jistého Hurwitzova problému" došli, na rovnice mající jen reálné koeficienty. Odvolávajíce se na citovaný článek, budeme jej značiti I.

Poněvadž podle předpokladu $\overline{a_k} = a_k$, přejde racionální lomená funkce (3) v I ve tvar

$$R(x, \psi) = \frac{a_1 \sin \psi \, x^{n-1} + a_2 \sin 2\psi \, x^{n-2} + \ldots + a_n \sin n\psi}{a_0 x^n + a_1 \cos \psi \, x^{n-1} + \ldots + a_n \cos n\psi} \qquad (1)$$

a determinanty (6) v I přejdou ve tvar

$$D_m^{\psi} = \frac{1}{a_0^{2m}} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \cos\psi & \ldots & a_{2m-1} \cos(2m-1)\psi \\ 0 & a_1 \sin\psi & \ldots & a_{2m-1} \sin(2m-1)\psi \\ 0 & a_0 & & a_{2m-2} \cos(2m-2)\psi \\ 0 & 0 & a_1 \sin\psi & a_{2m-2} \sin(2m-2)\psi \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & & a_m \cos m\psi \\ 0 & 0 & & a_m \sin m\psi \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Vyšetříme především některé vlastnosti polynomů v čitateli a jmenovateli v (1). Především jest

$$f_1(x, \psi) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \cos\psi + \ldots = R\,[e^{-ni\psi} f(x e^{i\psi})],$$
$$f_2(x, \psi) \equiv \qquad a_1 x^{n-1} \sin\psi + \ldots = J\,[e^{-ni\psi} f(x e^{i\psi})].$$

Má-li $f(x) = 0$ jednoduché kořeny, jsou společné kořeny (podle $x$) rovnic $f_1(x, \psi) = 0$, $f_2(x, \psi) = 0$ též jednoduché. Jednoduché kořeny má totiž i rovnice $e^{-ni\psi} f(x e^{i\psi}) = 0$ i rovnice $e^{ni\psi} f(x e^{-i\psi}) = 0$, takže rovnice

$$f(x e^{i\psi})\, f(x e^{-i\psi}) \equiv f_1^2 + f_2^2 = 0$$

může míti kořeny nejvýš dvojnásobné; tyto dvojnásobné kořeny jsou společny i rovnicím $f_1^2 = 0$, $f_2^2 = 0$; jiných společných dvojnásobných kořenů tyto rovnice nemají. Jak rozborem kořenových činitelův zjistíme, může míti $f(x e^{i\psi}) f(x e^{-i\psi}) = 0$ kořeny dvojnásobné pouze ve dvou případech:

1. Když některý kořen rovnice $f(x)$ leží na přímce $y = x \operatorname{tg} \psi$, kterýžto případ prozatím vylučujeme;

2. když mezi kořeny rovnice jest skupina 4 kořenů $x_1 = a e^{i\alpha}$, $x_2 = a e^{-i\alpha}$, $x_3 = a e^{i\beta}$, $x_4 = a e^{-i\beta}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ a volíme-li za $\psi$ jednu z hodnot $\frac{\pm\alpha\pm\beta}{2}$, čili když některá z dvojic $(x_1, x_3)$, $(x_1, x_4)$, $(x_2, x_3)$, $(x_2, x_4)$ leží symetricky vzhledem k přímce $y = x \operatorname{tg} \psi$. V tomto případě mění se uvedená čtveřina bodů ve dva páry stejných komplexně sdružených kořenů.

Jest tedy

$$f_1^2 = \varphi^2 f_1^{*2}, \quad f_1 = \varphi \cdot f_1^*;$$
$$f_2^2 = \varphi^2 f_2^{*2}, \quad f_2 = \varphi f_2^*,$$

kdež $\varphi$ jest polynom stupně sudého o vesměs různých kořenech, $f_1^*$ a $f_2^*$ pak jsou nesoudělny. V tomto případě funkci v (1) lze vyjádřiti polynomy stupně nižšího. Ovšem — poněvadž rovnice $f(x) = 0$ má konečný počet kořenů — lze vždy $\psi$ voliti tak, že počet kořenů po pravé i levé straně přímky $y = x \,.\, \operatorname{tg} \psi$ zůstane nezměněn a že nesnížen zůstane i stupeň polynomů v čitateli a jmenovateli funkce v (1).

Pak jsou $D_m \neq 0$ pro $m = 1, 2, \ldots, n$; $D_{n+1} = D_{n+2} = \ldots = 0$ a $\Delta^\psi$ je rovno signatuře řady

$$D_1^\psi, \frac{D_2^\psi}{D_1^\psi}, \ldots, \frac{D_n^\psi}{D_{n-1}^\psi}. \tag{3}$$

Rovnice $f(x) = 0$ má konečný počet kořenů; existuje jistě kladné číslo $\varepsilon$ takové, že pro $|\psi| < \varepsilon$ signatura řady (3) se nemění. Dělme elementy v sudých řádcích všech determinantů (2) veličinou $\sin \psi$; znaménko determinantu se nezmění a nezmění se ani signatura řady (3) a to ani v případě, když $\lim \psi = 0$. Tak nabudeme řady

$$D_1^0 = \frac{1}{a_0^2}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix}, \quad D_2^0 = \frac{1}{a_0^4}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}, \ldots$$

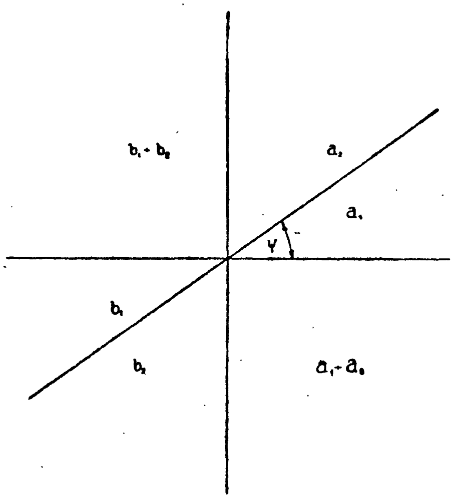
$$D_m^0 = \frac{1}{a_0^{2m}}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{2m-1} \\ 0 & a_1 & 2a_2 & \ldots & (2m-1)\, a_{2m-1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_m \\ 0 & 0 & & & m a_m \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Označme $\Delta^0$ signaturu čísel

$$D_1^0,\ \frac{D_2^0}{D_1^0},\ \frac{D_3^0}{D_2^0},\ \ldots,\ \frac{D_n^0}{D_{n-1}^0}; \tag{5}$$

$N^0$ jest v tomto případě počet kořenů záporných zvětšený o počet kořenů komplexních v horní polorovině, $P^0$ počet kořenů kladných zvětšený o počet kořenů komplexních v dolní polorovině; jest tedy $N^0 - P^0 = \Delta^0$. Rovnice tato zůstane v platnosti, *i když $N^0$ značí pouze počet kořenů záporných a $P^0$ počet kořenů kladných.*

Lze však signatuře $\Delta^\psi$ ve spojení se signaturou $\Delta^0$ dáti ještě jiný význam. Nechť v jednotlivých částech komplexní roviny jest tolik kořenů, kolik ukazuje obrazec 1.




Obr. 1.

Kladných kořenů buď $P^0$, záporných $N^0$. Jest pak

$$\Delta^\psi = (a_2 + b_1 + b_2 + b_1 + N^0) - (a_1 + a_1 + a_2 + b_2 + P^0)$$

čili

$$\Delta^\psi - \Delta^0 = 2(b_1 - a_1),$$

$$b_1 - a_1 = \frac{\Delta^\psi - \Delta^0}{2}.$$

Obecně o rozdílu počtu kořenů v úhlu sevřeném záporným směrem přímek $y = x \,.\, \mathrm{tg}\, \psi$, $y = x \,.\, \mathrm{tg}\, \varphi$, $\varphi > \psi$ a počtu kořenů v příslušném úhlu vrcholovém platí, že jest roven

$$\frac{\Delta^\varphi - \Delta^0}{2};$$

2. Nahradíme nyní řadu (5) jinou řadou o téže signatuře. Vyšetřování provedeme na obecnějším případě. Budiž $\varphi_{n-1}(x)$ polynom stupně $(n-1)$ho, $f_n(x)$ polynom stupně $n$-tého o vesměs různých nulových místech $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\varphi_{n-1}(x)$ a $f_n(x)$ buďte nesoudělny. Pak jest

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\xi_1}{x-x_1} + \frac{\xi_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{\xi_n}{x-x_n} =$$

$$= \frac{\frac{\xi_1}{x}}{1-\frac{x_1}{x}} + \ldots + \frac{\frac{\xi_n}{x}}{1-\frac{x_n}{x}} =$$

$$= \frac{\xi_1}{x} + \frac{\xi_1 x_1}{x^2} + \ldots + \frac{\xi_2}{x} + \frac{\xi_2 x_2}{x^2} + \ldots$$

$$+ \ldots$$

$$+ \frac{\xi_n}{x} + \frac{\xi_n x_n}{x^2} + \ldots,$$

takže

$$c_0 = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$
$$c_1 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_k = \xi_1 x_1^k + \xi_2 x_2^k + \ldots + \xi_n x_n^k.$$

Tak bychom si mohli opatřiti jinou řadu o signatuře $\Delta^0$; členové této řady vyjdou pro některá $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ zvlášť jednoduše.

Tak na př. v případě uvažovaném jest

$$\varphi_{n-1}(x) = n\, f(x) - x\, f'(x),$$

takže

$$\xi_k = -x_k, \quad c_p = -s_{p+1} = -(x_1^{p+1} + x_2^{p+1} + \ldots + x_n^{p+1}).$$

Značme ještě

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \vdots & & & . \\ s_m & s_{m+1} & \ldots & s_{2m-1} \end{vmatrix} = q_m.$$

Tak pro determinant $D_m^0$ nabýváme nového vyjádření, a sice jest

$$(-1)^m q_m = \frac{D_m^0}{a_0^{2m-1}}.$$

Čísla $q_0, q_1, \ldots q_m$ jsou známa z práce prof. Petra (Rozpr. VI. č. 8), kdež odvodil větu:

Rovnice (1) (o reálných koeficientech) má tolik kořenů záporných a párů kořenů komplexních, kolik má řada

$$1, q_1, q_2, \ldots, q_n$$

měn znaménkových; označme počet ten $m_1$. Zřejmě lze řadu tu nahraditi řadou

$$1, -D_1, D_2, \ldots, (-1)^n D_n;$$

počet měn znaménkových řady

$$1, D_1, D_2, \ldots, D_n$$

udává počet kořenů kladných zvětšený o počet párů kořenů komplexních.

Patrno jest, že $\quad m_1 + m_2 = n.$

Tyto dvě věty chceme dokázati pomocí signatury $\Delta^0$.

Posloupnost $1, D_1, D_2, \ldots D_n$ mějž $m_2$ měn; posloupnost $D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \ldots \frac{D_n}{D_{n-1}}$ má tolikéž záporných členů, tedy $m_2$, a $n - m_2$ kladných. Podle definice signatury jest $n - m_2 - m_2 = \Delta^0$, čili

$$m_2 = \frac{n - \Delta^0}{2}.$$

Značme $N^0$, $K^0$, $P^0$ počet kořenů záporných, komplexních a kladných; jest pak $N^0 + K^0 + P^0 = n$,

$$N^0 - P^0 = \Delta^0$$
$$K^0 + 2P^0 = n - \Delta^0 = 2m_2,$$
$$\frac{K^0}{2} + P^0 = m_2$$

a podobně

$$\frac{K^0}{2} + N^0 = m_1 \quad c . b . d.$$

3. První polára binární formy $n$-tého stupně $f(x, y)$ vzhledem k bodu, jehož homogenní souřadnice jsou $(\xi \mid \eta)$, jest

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

čili vzhledem k identitě

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

a potlačíme-li faktor $1/y$,

$$n \eta f(x, y) + (\xi y - x \eta) \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Zvolíme-li bod $(0/1)$ a přejdeme-li k obyčejným souřadnicím, máme

$$n . f(x) - x f'(x).$$

Tento polynom byl čitatelem racionální lomené funkce, jejíž signaturu jsme právě vyšetřovali. Tažme se, jaký jest význam signatury racionální lomené funkce

$$\frac{n \,.\, f(x) + (h - x) f'(x)}{f(x)},$$

kdež čitatel jest polára binární formy $f(x, y)$ vzhledem k bodu $(h/1)$ pro $y = 1$.

Pišme $h - x = -\xi$, $x = h + \xi$; pak signatura funkce

$$\frac{n f(h+\xi) - \xi f'(h+\xi)}{f(h+\xi)}$$

udává rozdíl počtu kořenů menších a větších než nula rovnice $f(\xi + h) = 0$, čili rozdíl počtu kořenů větších a menších než $h$ rovnice $f(x) = 0$. Signaturu tu lze stanoviti z různých řad. Především jest

$$n - \frac{\xi f'(h+\xi)}{f(h+\xi)} = -\frac{\xi_1}{\xi - \xi_1} - \frac{\xi_2}{\xi - \xi_2} - \ldots - \frac{\xi_n}{\xi - \xi_n},$$

$$\xi_i = x_i - h, \quad i = 1, \ldots, n,$$

odkudž způsobem týmž jako v odstavci 3 dostáváme řadu

$$-q_1^{(h)}, -\frac{q_2^{(h)}}{q_1^{(h)}}, \ldots, -\frac{q_n^{(h)}}{q_{n-1}^{(h)}},$$

$$q_m^{(h)} = (-1)^m \begin{vmatrix} \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m, \\ \vdots \\ \sigma_m, \ldots \ldots \sigma_{2m-1} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

kdež $\quad \sigma_p = (x_1 - h)^p + (x_2 - h)^p + \ldots + (x_n - h)^p$.

Lze však též psáti

$$\frac{n f(x) + (h - x) f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{h - x_i}{x - x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{h - x_i}{x}}{1 - \frac{x_i}{x}} =$$

$$= \frac{h s_0 - s_1}{x} + \frac{h s_1 - s_2}{x^2} + \ldots + \frac{h s_{p-1} - s_p}{x^p},$$

takže signaturu uvažované rac. funkce lze vyčísti z řady

$$p_1^{(h)}, \frac{p_2^{(h)}}{p_1^{(h)}}, \ldots, \frac{p_n^{(h)}}{p_{n-1}^{(h)}}, \tag{7}$$

kdež

$$p_m^{(h)} = \begin{vmatrix} h s_0 - s_1 & \ldots & h s_{m-1} - s_m \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ h s_{m-1} - s_m & \ldots & h s_{2m-2} - s_{2m-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ h & s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ h^2 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{m+1} \\ \vdots & & & & \\ h^m & s_m & s_{m+1} & \ldots & s_{2m-1} \end{vmatrix} . (-1)^m. \tag{6'}$$

Hattendorf (Über Sturm. Funktionen pag. 50) ukázal, že řada

$$p_1^{(h)}, p_2^{(h)}, \dots, p_n^{(h)}$$

jest řada Sturmových funkcí rovnice $f(x) = 0$; jednodušší důkaz viz Petr, Rozpravy VI č. 8, pag. 5. Avšak $p_m^{(h)}$ lze vyjádřiti podle metody Hurwitzovy v koeficientech dané rovnice; jest pak

$$\frac{n\,f(x) + (h - x)\,f'(x)}{f(x)} =$$
$$\frac{(n\,h\,a_0 + a_1)\,x^{n-1} + (\overline{n-1}\,a_1\,h + 2a_2)\,x^{n-2} + \dots + (a_{n-1}\,h + n\,a^p)}{a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + \dots + a_n}$$

a po jednoduchých obratech obdržíme, že $p_m^{(h)}$ jest až na kladnou multiplikativní konstantu rovno

$$-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_{2m-1} & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 \dots & (2m-1)\,a_{2m-1} & h^m \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \dots & a_{2m-2} & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 2a_2 \dots & (2m-2)\,a_{2m-2} & h^{m-1} \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \dots & a_{2m-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \dots & (2m-3)\,a_{2m-3} & h^{m-2} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots n\,a_0, & (n-1)\,a_1 \dots & (n-m+1)\,a_{m-1} & -1 \end{vmatrix} \qquad (6'')$$

Tak tedy obdržíme řadu Sturmových funkcí přímo v koeficientech dané rovnice.

Případem $h = 0$ zabývali jsme se v odst. 2; vyšetřme ještě případ, když $h$ roste nad každou mez.

Signatura řady (7) se nemění, dělíme-li elementy všech determinantů (6) číslem $h > 0$, nebo poslední sloupec determinantů (6'') číslem $h^n$. Existuje pak kladné číslo $h_1$ takové, že pro všechna $h > h_1$ bude signatura řady táž a tudíž i pro lim $h = \infty$.

Jaký jest nyní význam řady

$$p_1^{\infty}, \frac{p_2^{\infty}}{p_1^{\infty}}, \dots, \frac{p_n^{\infty}}{p_{n-1}^{\infty}},$$

patřící k lomené racionální funkci $f'(x)/f(x)$?

Počet kořenů menších než $+h$ pro ustavičně rostoucí $h$ jest počet reálných kořenů $R_0$, počet kořenů větších než $+h$ ustavičně rostoucí jest nula; jest tedy

$$R_0 + K_0 = n$$
$$R_0 = \Delta_0,$$

takže

$$K_0 = n - \Delta_0.$$

Vzpomeňme, že $n - \bar{\Delta}_0 = 2m$, kdež $m$ jest počet měn v řadě $p_1^\infty, p_2^\infty, \ldots, p_m^\infty$; tak dospíváme k známé větě Borchardtově o počtu párů komplexních kořenů dané rovnice.

Srovnáním výsledků plynoucích z (6') a (6'') pro $h \to \infty$ máme

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ \vdots & & & \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_0^{2m-2}} \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & \ldots & & (2m-2)\, a_{2m-2} \\ a_0 & a_1 & \ldots & & a_{2m-3} \\ 0 & a_1 & \ldots & & (2m-3)\, a_{2m-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & (n-m+2)\, a_{m-2} & (n-m+1)\, a_{m-1} \end{vmatrix}$$

Jest tedy na př.

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_0^2} \begin{vmatrix} a_1, & 2a_2 \\ na_0, & (n-1)\, a_2 \end{vmatrix} = \frac{n\,(a_1^2 - 2\,a_0\,a_2) - a_1^2}{a_0^2}$$

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_0^4} \begin{vmatrix} a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4 \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ 0 & a_1, & 2a_2, & 3a_3 \\ 0 & na_0, & (n-1)\, a_1, & (n-2)\, a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a_1^2\,a_2^2 + 10\,a_0\,a_1\,a_2\,a_3 - 2a_1^3\,a_3 - 4a_0\,a_2^3 - 9a_0^2\,a_3^2 - 4\,a_0\,a_1^2\,a_4}{a_0^4}\,n +$$

$$+ \frac{8a_0^2\,a_2\,a_4}{a_0^4}\,n + \frac{2a_1^2\,(a_1\,a_3 - a_2^2) + 4a_0\,(2a_2^2 + a_1^2\,a_4 - 3a_1\,a_2\,a_3)}{a_0^4}.$$

Stanovení počtu kořenů rovnice $f(x) = 0$ ležících na přímce $y = x \operatorname{tg} \psi$ $(\psi \neq 0)$ převede se na stanovení počtu reálných kořenů rovnice o komplexních koeficientech

$$f(x\,e^{i\psi}) = 0;$$

viz o tom I odstav. 2.

## Quelques applications de la notion de signature des formes quadratiques dans la théorie des équations algébriques.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans l'article précédént, j'applique, aux équations algébriques aux coefficients réels, les résultats que j'ai publiés récemment dans ce Journal T. LVII p. 81.

En me servant de la notion de signature d'une forme quadratique, j'énonce plusieurs théorèmes sur la différence des nombres de racines d'une équation algébrique, qui sont situées des deux côtés de la droite $y = x \operatorname{tg} \psi$. Dans le cas particulier $\psi = \frac{1}{2} \pi$ j'arrive aux résultats de M. Hurwitz. Ensuite je démontre un théorème de M. K. Petr (Comptes Rendus de l'Académie de Prague VI. n° 8), ainsi qu'un théorème de M. Hermite sur la différence des nombres de racines supérieures, resp., inférieures à un nombre donné. Enfin, je trouve facilement le théorème bien connu de M. Borchardt.