František Nachtikal
Theorie dopružování. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 2-3, 119--152

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121366

les $f(t) = kt$ ou $MQ = k \, . \, MP$, k étant une constante arbitraire. L'équation de ces courbes s'écrit

$$cy^k = x^2 + y^2 - a^2 - 2ly.$$

Les coniques appartiennent à ce type de courbes pour $k = 2$; quelques constructions simples des normales et des centres de courbure pour les coniques y sont développées.

Pour $k = 3$ on est conduit aux courbes

$$x^2 = cy^3 - y^2 + 2ly + a^2.$$

Ensuite d'autres courbes connues sont mentionnées que l'on obtient en substituant des différentes valeurs au lieu de k dans l'équation donnée ci-dessus, et en particulier les courbes dont l'équation s'écrit

$$y^n = c\,(x^2 + y^2)^e$$

et qui ont été considérées par Clairaut.

Theorie dopružování.

Napsal dr. Frant. Nachtikal v Brně.

1. *Úvod. Definice ryzího dopružování.* V pružném tělese vznikají současně s deformacemi vnitřní síly, jež jsou těmito deformacemi jednoznačně určeny; udržujeme-li určitý stav deformací stálým, jsou také tyto vnitřní síly stálými. Jsou-li ještě vnitřní síly úměrny deformacím, jest těleso dokonale pružné. Tělesa dokonale pružná jsou ovšem pouze abstrakcí. Skutečná tělesa jeví odchylky někdy větší, jindy menší. Mezi tyto odchylky patří zjev zvaný dopružováním. Dopružování definujeme obecně jako vlastnost těles, v nichž okamžité vnitřní síly závisí netoliko na nynějších deformacích, nýbrž i na dřívějších deformacích. V určitě deformovaném tělese mohou býti různé vnitřní síly, jež se časem mění. Po dosti dlouhé době, udržujeme-li deformaci takovýchto těles stálou, nastane jistý konečný stav vnitřních sil, jenž se pak s dobou již nemění. Tento stav nazývá Wiechert[1]) *katastatickým*, snad vhodnější bylo by nazvati tento stav *normálním*, neboť v tomto stavu pominul již účinek dřívějších deformací a vnitřní síly jsou určeny pouze rozdělením deformací jako v pružném tělese (nenastaly-li trvalé deformace).

---

[1]) E. Wiechert, Wied. Ann. *50*. 336. 1893.

V dalších úvahách ponecháme však Wiechertův název *katastase*. Jinou odchylku od zákonů pružných těles představují trvalé deformace, což po případě můžeme nazývati *elastickou hysteresí*. V takovémto případě závisí při stejných vnějších silách skutečné deformace na způsobu, jakým se těleso do toho stavu dostalo, nebo zkrátka na *deformační cestě*. A zase naopak při určitých deformacích závisí skutečné vnitřní síly také na deformační cestě, ale časově se nemění. Jest ovšem možno, že těleso jeví současně i dopružování i elastickou hysteresi. Jednoduchý příklad věc objasní. Drát určité délky a průřezu protáhneme o jistou délku a vyšetříme tah, jakého je třeba, aby byl drát v tomto prodloužení udržován. Je-li tento tah nezávislý i na čase i na deformační cestě, je drát prostě pružný (bez dopružování i bez hysterese); platí-li mimo to zákon úměrnosti mezi tahem a prodloužením, máme příklad tělesa dokonale pružného. Kdyby však potřebný tah byl různý za různých deformačních cest (na př. jednou jsme jej jenom protahovali, podruhé napřed silněji protáhli a pak popustili), jevilo by těleso elastickou hysteresi. Kdyby naopak tah potřebný byl při téže deformaci časově proměnlivý, na př. napřed větší, čím dále však menší, jevilo by těleso dopružování. Po jisté době nastane stav ustálený (katastatický); je-li tah potřebný v katastatickém stavu nezávislý na deformační cestě, jeví těleso čisté dopružování (bez hysterese). Kdyby však i v katastatickém stavu byl tah potřebný na udržování stálého prodloužení různý podle deformační cesty, jeví těleso i dopružování i hysteresi.

Úvahy tohoto článku budou se zabývati pouze čistým dopružováním, při němž tudíž vnitřní síly v katastatickém stavu jsou závislé pouze na deformacích, ne však na deformační cestě.

2. *Časová závislost skutečných vnitřních sil.* Prvým úkolem bude zjistiti, podle jakého zákona při stálé deformaci tělesa přibližuje se soustava skutečných vnitřních sil stavu katastatickému. Pro jednoduchost mějme na mysli zase případ drátu protahovaného; k současnému příčnému zkrácení zatím přihlížeti nebudeme. Označíme-li prodloužení jednotky délkové λ (relativní prodloužení), bude třeba po dosti dlouhém čase, tedy v katastatickém stavu, vnějšího napětí S' na cm^2 průřezu, jež se rovná

vnitřnímu katastatickému napětí v materiálu. Veličiny vztahující se na stav katastatický budeme důsledně označovati čárkováním. Za předpokladu Hookeova zákona pro stav katastatický bude toto napětí určeno vzorcem

$$S' = E.\lambda,$$

v němž E znamená modul pružnosti v tahu a jest konstantou látky. Ve skutečnosti při stejném napětí S' vzniklo by v drátu původně menší relativní prodloužení, jež by teprve s rostoucí dobou vzrostlo na konečnou hodnotu λ. Nutno tudíž souditi, že při okamžitém prodloužení o λ vznikne napřed skutečné napětí S, větší než katastatické, jež však postupně klesá až na hodnotu katastatickou S'. Rozdíl obou napětí $\sigma = S - S'$ stanoví účinek dopružování v tělese a nazveme jej *dopružovacím napětím.* O něm víme pouze, že jest funkcí času toho druhu, že pro $t = \infty$ jest $\sigma = 0$. Přímá měření, jež prvý konal Weber[2]), pak v obsáhlé míře F. Kohlrausch[3]), ovšem vedle četných jiných pozorovatelů, na př. Wiechert (l. c.) nebo Tobusch[4]), mohou nám, vhodně propočtena byvše, poskytnouti hodnoty této funkce. Tím byla by tato závislost stanovena na př. diagramem, tabulkou nebo empirickým vzorcem. Takovýmto způsobem byl by tudíž průběh dopružování kvantitativně popsán. Z fysikálního stanoviska nás však pouhý popis neuspokojuje. Žádáme spíše výklad tohoto zjevu, jak totiž časový průběh vnitřních napětí souvisí s dřívějšími deformacemi. V tomto smyslu byla podána řada theorií, z nichž význačnější budeme stručně charakterisovati.

Boltzmann[5]) vychází z uvedené představy, že při dopružování vnitřní síly v tělesích závisí netoliko na nynějších deformacích, nýbrž i na dřívějších deformacích. Mathematickou formulací této myšlenky dospívá k výsledku, že obvyklý vztah mezi vnitřními napětími a deformacemi je třeba doplniti dvěma časovými integrálními členy, jež vyjadřují účinek všech předcházejících deformací.

---

[2]) W. Weber, Pogg. Ann. *34.* 247. 1835; *54* 1. 1841.

[3]) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. *34.* 337. 1863; *128.* 1. a 399. 1866; *155.* 577. 1875; *158.* 337. 1876. a *160.* 225. 1877.

[4]) H. Tobusch, Ann. d. Phys. *26.* 439. 1908.

[5]) L. Boltzmann, Pogg. Ann. Erg.-Bd. *7.* 624. 1876.

Podobným způsobem postupuje Volterra[6]), jenž po příkladu Piccardově rozděluje fysikální zjevy na zjevy *bez dědičnosti* (na př. pohyby těles nebeských) a na zjevy *s dědičností*, k nimž patří mimo jiné dopružování. Tím je jinými slovy vyjádřeno, že při dopružování a podobných zjevech rozhoduje o průběhu děje netoliko přítomný stav, nýbrž i stavy minulé. Autor ukazuje pak, že takovéto děje s dědičností lze mathematicky vyjádřiti smíšeným systémem rovnic differenciálních a integrálních, tedy v podstatě obdobně jako u Boltzmanna.

Závadou takovýchto theorií jest, že není známa funkce, podle níž kterákoli dřívější deformace účinkuje na pozdější stav tělesa. Závadu tuto do jisté míry odstraňuje theorie Wiechertova[7]), jenž předpokládá podle Maxwella[8]), že dopružovací napětí se zmenšuje rychlostí úměrnou okamžité velikosti tohoto dopružovacího napětí. Tento jednoduchý předpoklad, jenž bude také základem této práce, nevyhovuje však zcela uspokojivě pozorováním; po delší době jeví se odchylky mezi hodnotami vypočítanými podle tohoto předpokladu a mezi hodnotami pozorovanými. Proto Wiechert činí dosti odvážnou domněnku tím, že celkové dopružovací napětí rozkládá na nekonečný počet jednotlivých napětí, z nichž každé jednotlivé řídí se sice týmž jednoduchým zákonem Maxwellovým, avšak s nejrůznějšími konstantami úměrnosti. Převratná hodnota těchto konstant úměrnosti slove *relaxační doba*. O tomto nekonečně velkém počtu relaxačních dob dále předpokládá, že jsou seskupeny okolo jisté nejpravděpodobnější hodnoty podle zákonů pravděpodobnosti. Za těchto duchaplných sice předpokladů, jež však z fysikálního stanoviska jsou přece jen povážlivé, dostává pro časový průběh dopružování v omezeném rozsahu časovém vzorce, jež může uvésti v soulad s pozorováními vlastními i cizími.

Tímto směrem se však v této práci bráti nebudeme. Skromnějším úkolem naším bude, jednoduchými a fysikálně odůvodněnými předpoklady upraviti obvyklou theorii pružnosti tak, aby v sobě zahrnovala také děje dopružováním vznikající. Při tom

---

[6]) V. Volterra, Rend. R. Acc. dei Linc. (5) *18*. 2. sem. 295. a 577. 1909, *19*. 1. sem. 107 a 239. 1910; ref. Beibl. 515, 517, 690 a 1140. 1910.

[7]) E. Wiechert, Wied. Ann. *50*. 335 a 546. 1893.

[8]) Cl. Maxwell, Phil. Trans. *157*. 52. 1867; Scien. Papers, 2. 90. 1890.

učiníme základní předpoklad, že účinek minulých deformací projevuje se jedině tím, že daly vznik jistému dopružovacímu napětí v tělese; další průběh tohoto dopružovacího napětí je pak závislý pouze na nynější jeho velikosti a ovšem na dalších deformacích. To jest ovšem určité omezení celého problému na prvé přiblížení. Získáváme tím však cennou výhodu, že lze zjevy dopružování přehledně zpracovati v jednotnou theorii. Celá další práce jest mathematickou formulací této základní myšlénky.

3. *Relaxace.* Podle předešlého předpokládáme, že časová změna dopružovacího napětí σ určená rychlostí $d\sigma/dt$ jest funkcí okamžité velikosti dopružovacího napětí

$$\frac{d\sigma}{dt} = f(\sigma).$$

Za přirozeného předpokladu spojitosti této funkce rozviňme ji podle poučky Mac-Laurinovy

$$\frac{d\sigma}{dt} = f(0) + \frac{f'(0)}{1}\sigma + \frac{f''(0)}{1.2}\sigma^2 + \ldots$$

V katastatickém stavu není žádného dopružovacího napětí, $\sigma = 0$, a pak ovšem nenastává žádná jeho změna, $d\sigma/dt = 0$. Z toho plyne $f(0) = 0$. V tělesích, jež jeví poměrně malé dopružování, jest σ veličinou malou prvého řádu a můžeme se tudíž v prvém přiblížení omeziti na lineárný člen. Jeho koefficient podle povahy dopružování musí býti záporný, neboť dopružováním se dopružovací napětí vždy zmenšuje. Kdybychom podrželi i kvadratický člen σ^2, znamenalo by to, že dopružování je dějem asymmetrickým. Za stejné hodnoty σ jednou kladné, po druhé záporné (tedy jednou při dopružovacím *napětí*, podruhé při dopružovacím *tlaku*) byla by rychlost, s níž se σ zmenšuje, pokaždé poněkud jiná. Tato domněnka jest sice velmi pravděpodobná, znamená však přece jen pouhou korrekci, k níž v prvém přiblížení nebudeme přihlížeti. Pouze v poslední části této práce vrátíme se k významu tohoto kvadratického členu.

Touto úvahou dospíváme tudíž k zákonu platnému při stálé deformaci

$$\frac{d\sigma}{dt} = -n\sigma, \qquad (1)$$

jejž vlastně už Maxwell (l. c.) pro dopružování stanovil.

Koefficient úměrnosti n má rozměr převratné doby; Wiechert (l. c.) jej nazval *relaxační rychlostí.* Jeho převratná hodnota $\tau = 1/n$ znamená dobu, kterou Maxwell nazval *dobou relaxační.*

Integrálem hořejší rovnice jest

$$\sigma = \sigma_0 \, e^{-nt} = \sigma_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Dopružovací napětí při stálé deformaci zmenšuje se s dobou podle zákona exponenciálního, což budeme nazývati *relaxací.* Doba relaxační τ znamená podle toho dobu, za kterou se původní napětí σ zmenší na hodnotu v poměru $\frac{1}{e} = \frac{1}{2{\cdot}718\ldots} = 0{\cdot}3668\ldots$ menší.

4. *Základní rovnice pro dopružování, je-li deformace tělesa určena jediným parametrem.* Maxwellův vzorec (*1*) stanoví, jak se zmenšuje dopružovací napětí při stálé deformaci. Mění-li se však deformace tělesa, vzniká každou deformací nové dopružovací napětí, jež za předpokladu superposice účinků se připojuje k dopružovacímu napětí již existujícímu. V případě protahovaného drátu budiž jeho relativní prodloužení λ, tudíž katastatické napětí $S' = E\lambda$. Skutečné vnitřní napětí je pak

$$S = S' + \sigma = E.\lambda + \sigma,$$

značí-li σ dopružovací napětí. Zvětší-li se nyní relativní prodloužení o $d\lambda$, zvětší se tím skutečné napětí o

$$dS = E.\, d\lambda + d\sigma.$$

O zvětšení dopružovacího napětí $d\sigma$ učiníme zase nejjednodušší předpoklad, že jest úměrné změně relativního prodloužení a tudíž i vzrůstu katastatického napětí, tedy

$$d\sigma = k.\, dS' = k.\, E.\, d\lambda.$$

Konstanta k charakterisuje velikost dopružování vyšetřované látky a nazveme ji *konstantou dopružování*; při látkách jevících poměrně malé dopružování, na něž se omezujeme, jest pak k veličinou malou.

Za dobu dt změní se tudíž dopružovací napětí z dvojího důvodu: relaxací se zmenšilo podle Maxwellova zákona o $n.\sigma.dt$, vznikem nové deformace $d\lambda$ se zvětšilo o $k.E.d\lambda$.

Celková změna za předpokladu superposice obou účinků je tudíž

$$d\sigma = -n\,\sigma\,dt + k\,E.\,d\lambda.$$

Dosadíme-li do této rovnice za σ hodnotu vyjádřenou pomocí skutečného napětí S ve hmotě

$$\sigma = S - E\,\lambda,$$

dostáváme rovnici dopružování

$$dS - E.\,d\lambda = -n\,(S - E\,\lambda)\,dt + kE.\,d\lambda$$

anebo

$$\frac{dS}{dt} + nS = E\,(1+k)\frac{d\lambda}{dt} + nE\lambda, \tag{2}$$

jež stanoví, jak se mění skutečné napětí S drátu libovolně v čase protahovaného.

Bez dopružování bylo by $S = E\lambda$. U těles jevících dopružování jest tento základní zákon Hookeův nahrazen differenciální rovnicí (2), jejíž integrace podle času určuje skutečné napětí v drátu jakožto funkci deformační cesty, po níž se drát do dané deformace dostal.

Podle odvození platí rovnice (2) pro případ drátu protahovaného. Jako však zákon Hookeův platí pro deformaci jakéhokoli druhu, tak lze i rovnici (2) zobecniti. Je-li hmota deformována jiným způsobem, ale tak, že okamžité deformace jsou určeny jediným parametrem (na př. kroucení drátu, při němž jest jeho zkroucení určeno relativním zkroucením λ), zůstává celá úvaha v platnosti a rovnice (2) vystihuje týž případ, dosadíme-li ovšem za E příslušnou konstantu podle zákona Hookeova. Jak později ukážeme, konstanty dopružování n a k mají však hodnotu touž.

5. *Některé jednoduché případy. Drát protahovaný.* Odvozená základní rovnice (2) dovoluje řešiti případy, v nichž deformace drátu jest určena jediným parametrem (stejnoměrné protahování nebo zkrucování drátu, ohyb tyče a pod.). Omezíme se na případ protahovaného drátu; nalezené výsledky platí však též pro ostatní případy, pozměníme-li ovšem vhodně význam konstanty E. Při tom však předpokládáme, že celý drát jest stejnoměrně deformován; jinými slovy řečeno, nehledíme k vlastním podélným kmitům drátu. Příslušné rozšíření problému ponecháváme až do obecné theorie.

Nutno rozeznávati dva hlavní případy. Buď jsou časově předepsány deformace drátu (drát *protahovaný*) a pak rovnice (2) určuje, jak se při tom mění vnitřní napětí materiálu. Nebo jsou časově stanovena vnější napětí, rovná skutečným vnitřním napětím, a pak z rovnice (2) vyplývá časový průběh deformací (drát *napínaný*). Při tom budeme rozuměti drátem *odpočatým* takový, v němž vliv předchozích deformací již zmizel, jenž tudíž jest ve stavu katastickém, nemaje dopružovacího napětí.

Budiž na př. odpočatý drát rovnoměrně protahován v době od $t = 0$ do $t = T$ až na konečné relativní prodloužení λ_0 a pak na tomto prodloužení trvale udržován. Po dobu protahování roste relativní prodloužení λ podle vztahu

$$\lambda = \lambda_0 \frac{t}{T},$$

což dosazeno do rovnice (2) dává pro skutečné napětí S podmínečnou rovnici

$$\frac{dS}{dt} + nS = E(1 + k)\frac{\lambda_0}{T} + nE\lambda_0 \frac{t}{T}.$$

Přihlédneme-li k podmínce, že v čase $t = 0$ bylo vnitřní napětí $S = 0$, dostáváme integrací této rovnice vztah

$$S = E\lambda_0 \frac{t}{T} + E\lambda_0 \frac{k}{nT}(1 - e^{-nt}).$$

V tomto výraze určuje prvý člen

$$S' = E\lambda_0 \frac{t}{T}$$

napětí, jaké by bylo v drátu bez dopružování, tudíž t. zv. katastické napětí. Druhý člen

$$\sigma = E\lambda_0 \frac{k}{nT}(1 - e^{-nt}).$$

vyjadřuje účinek dopružování a znamená dopružovací napětí. V čase $t = T$, kdy protahování drátu zastavíme, jest skutečné napětí drátu

$$S_T = E\lambda_0 + E\lambda_0 \frac{k}{nT}(1 - e^{-nT})$$

Kdybychom byli protáhli drát nekonečně rychle ($\lim T = 0$), bylo by toto skutečné napětí

$$S_0 = E\lambda_0 + E\lambda_0 . k = (1 + k) E\lambda_0,$$

což se ovšem dalo očekávati. Při relativním prodloužení o λ_0 vznikne v drátu vedle katastického napětí $S' = E\lambda_0$ podle našeho předpokladu ještě dopružovací napětí $\sigma = kS' = kE\lambda_0$ a součet o obou dává skutečné napětí v materiálu.

V další době $t > T$ jest relativní prodloužení stálé a základní rovnice (2) nabývá tvaru

$$\frac{dS}{dt} + nS = nE\lambda_0,$$

jejímž integrálem jest

$$S = E\lambda_0 + C.\,e^{-nt}.$$

Integrační konstantu C určíme z podmínky, že v čase $t = T$ bylo $S = S_T$ dříve nalezené, z čehož plyne

$$C = E\lambda_0 \frac{k}{nT}(e^{nT} - 1).$$

Obecné řešení pro doby $t > T$ jest tudíž

$$S = E\lambda_0 + E\lambda_0 . \frac{k}{nT}(e^{nT} - 1).\, e^{-nt},$$

v němž zase prvý člen znamená napětí katastatické a druhý člen napětí dopružovací. Po nekonečně dlouhém čase ($t = \infty$) druhý člen odpadá a nastává stav katastatický.

Za předpokladu okamžitého protažení drátu ($T = 0$) jest integrační konstanta $C = k.\,E\lambda_0$ a skutečné napětí

$$S = E\lambda_0\,(1 + ke^{-nt}). \tag{3}$$

V obojím případě vypočtené vnitřní napětí S rovná se vnějšímu napětí, kterým musí býti drát v dané deformaci udržován. Napětí toto bylo by však dosti nesnadno experimentálně stanoviti a tak vzorce kontrolovati.

6. *Drát napínaný.* Zpravidla demonstruje se dopružování tímto pokusem: drát napne se stálým napětím S_0, tím se ihned protáhne o jistou část, ale pak se ještě s rostoucí dobou dále protahuje. Za předepsaného vnějšího napětí dlužno tudíž určiti časový průběh relativního prodloužení. Nutno však výslovně podotknouti, že náhlým zatížením drátu vzniknou v něm longitudinální kmity, k nimž zatím přihlížeti nebudeme; omezíme se na „quasistatické“ napínání drátu.

Pro všeobecnost předpokládejme zase, že drát dokonale odpočatý byl napínán po dobu T napětím rovnoměrně rostoucím

$$S = S_0 \frac{t}{T}.$$

Dosadíme-li tento výraz do základní rovnice (2), dostaneme pro vzrůst relativního prodloužení λ podmínečnou rovnici

$$E\,(1 + k)\,\frac{d\lambda}{dt} + nE\lambda = \frac{S_0}{T} + nS_0\,\frac{t}{T}.$$

Integrací této rovnice dostáváme pro dobu $0 < t < T$ výraz

$$\lambda = \frac{S_0}{E}\cdot\frac{t}{T} - \frac{kS_0}{EnT}\left(1 - e^{-\frac{nt}{1+k}}\right).$$

Prvý člen zase znamená relativní prodloužení, jaké by bylo v každém čase bez dopružování; druhý člen stanoví účinek dopružování a ukazuje, že skutečné prodloužení je vždy menší, než by bylo bez dopružování, jak se dalo ovšem očekávati.

V době T, kdy napínající napětí nabylo své konečné hodnoty S_0, je relativní prodloužení

$$\lambda_T = \frac{S_0}{E} - \frac{kS_0}{EnT}\left(1 - e^{-\frac{nT}{1+k}}\right).$$

Kdyby zase napětí bylo počalo působiti okamžitě ($lim\ T = 0$), bylo by toto prodloužení

$$\lambda_0 = \frac{S_0}{E\,(1 + k)},$$

tudíž v poměru $1 : (1 + k)$ menší, než by bylo bez dopružování.

Od této doby je napětí S_0 stálé, platí tudíž pro doby $t > T$ rovnice

$$E\,(1 + k)\,\frac{d\lambda}{dt} + nE\lambda = nS_0,$$

z níž plyne integrací v obecném případě

$$\lambda = \frac{S_0}{E} - \frac{kS_0}{EnT}\left(e^{\frac{nT}{1+k}} - 1\right).\,e^{-\frac{nt}{1+k}}.$$

Pro případ jednodušší, že napětí počalo působiti okamžitě ($lim\ T = 0$), dostáváme vztah

$$\lambda = \frac{S_0}{E} - \frac{kS_0}{(1 + k)\,E}\cdot e^{-\frac{nt}{1+k}}. \qquad (4)$$

Prvý člen v obou výrazech znamená prodloužení po nekonečně dlouhé době, tedy v stavu katastatickém, jež se rovná relativnímu prodloužení podle obyčejné theorie pružnosti.

Z pozorování na napiatém drátu jest možno stanoviti obě konstanty dopružování. Za předpokladu, že vnější napětí S_0 počalo působiti okamžitě, jest počáteční prodloužení λ_0 a konečné λ_∞ určeno vztahy

$$\lambda_0 = \frac{S}{E(1+k)}, \qquad \lambda_\infty = \frac{S}{E},$$

z čehož plyne pro koefficient dopružování

$$k = \frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_0}.$$

Z časového průběhu dopružování určí se pak relaxační rychlost n a tudíž i její převratná hodnota, relaxační doba.

7. *Práce potřebná na deformaci.* V dokonale pružném tělese jest práce L, již je třeba vykonati, aby drát byl napětím S uveden do relativního prodloužení λ, vztahujeme-li ji na objemovou jednotku

$$L = \frac{1}{2} S\lambda = \frac{1}{2} \frac{S^2}{E} = \frac{1}{2} E\lambda^2.$$

Práce tato jest nezávislá na způsobu, jak byl drát do konečné deformace přiveden a znamená tudíž vnitřní elastickou energii objemové jednotky.

Za dopružování jest tato práce závislá na deformační cestě. Vypočteme ji pro případ, že drát byl rovnoměrně protahován po dobu T, takže jeho relativní prodloužení λ rostlo dle vzorce

$$\lambda = \lambda_0 \frac{T}{t},$$

a pak byl v tomto prodloužení trvale udržován. Práce se koná za tohoto předpokladu pouze v období, pokud je drát protahován, a jest

$$L = \int_0^T S \,.\, d\lambda$$

anebo, dosadíme-li za S hodnotu nalezenou v odstavci 5.,

$$L = \int_0^T \left[E\lambda_0 \frac{t}{T} + E\lambda_0 \frac{k}{nT}\left(1 - e^{-nt}\right)\right] . \frac{\lambda_0}{T}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} E\lambda_0^2 \left[1 + \frac{2k}{nT} - \frac{2k}{n^2T^2}\left(1 - e^{-nT}\right)\right]. \qquad (5)$$

Práce tato jest závislá na době T, po kterou byl drát protahován. O výrazu v hranaté závorce dá se dokázati, že jest největší pro $lim\ T = 0$, tedy při nekonečně rychlém protažení. S rostoucí dobou protahování T výraz ten se stále zmenšuje a nabývá nejmenší hodnoty pro $lim\ T = \infty$. V tomto případě jest tato práce

$$L_\infty = \tfrac{1}{2} E\lambda_0^2,$$

což je týž výraz, jako při tělese dokonale pružném. Při takovémto nesmírně volném protahování nevzniká totiž dopružovací napětí (drát je stále v katastatickém stavu) a proto dopružování nemá vlivu. Necháme-li pak drát zase nesmírně zvolna se zkracovati, dostáváme celou dodanou práci zpět; uvedenený výraz značí tudíž elastickou energii objemové jednotky v katastatickém stavu. Zkracuje-li se však drát s konečnou rychlostí, vrací méně práce.

Druhý krajní případ nastane, když byl drát protažen okamžitě, tedy pro $lim\ T = 0$. Rozvineme-li výraz pro práci (5) v řadu, dostáváme pro tento případ

$$L_0 = \tfrac{1}{2} E\lambda_0^2 (1 + k),$$

tudíž hodnotu větší v poměru $(1 + k) : 1$. Ze vzorce tohoto vyplývá nový význam dopružovací konstanty k; znamená relativně tu část práce, o kterou třeba při nekonečně rychlém protažení drátu více vykonati než bez dopružování, tedy práci vykonanou proti vznikajícímu dopružovacímu napětí.

Jest otázkou, zdali i v tomto druhém krajním případě můžeme dostati celou vykonanou práci zpět. Nechme drát nekonečně rychle protažený ihned se zkracovati po dobu T podle vztahu

$$\lambda = \lambda_0 \frac{T - t}{T}.$$

Dosadíme-li výraz tento do základní podmínečné rovnice (2) máme pro okamžité vnitřní napětí drátu vztah

$$\frac{dS}{dt} + nS = nE\lambda_0 \frac{T - t}{T} - (1 + k) \frac{E\lambda_0}{T}.$$

Obecný integrát této rovnice jest

$$S = C_0 e^{-nt} + E\lambda_0 \frac{T - t}{T} - \frac{kE\lambda_0}{nT}.$$

Uvážíme li, že v čase $t = 0$ bylo skutečné napětí okamžitě protaženého drátu

$$S_0 = (1 + k)\, E\lambda_0\,,$$

můžeme určiti hodnotu integrační konstanty

$$C_0 = kE\lambda_0 \left(1 + \frac{1}{nT}\right).$$

Řešení daného případu lze tudíž uvésti do tvaru

$$S = E\lambda_0 \frac{T - t}{T} + kE\lambda_0 e^{-nt} - \frac{kE\lambda_0}{nT}\left(1 - e^{-nt}\right).$$

Práce, kterou drát při tomto zkracování vykoná, jest, vztahujeme-li ji zase na jednotku objemovou

$$L = -\int_0^T S \,.\, \frac{d\lambda}{dt}\, dt = \frac{1}{2}\, E\lambda_0^2 \left[1 - \frac{2k}{nT}\, e^{-nT} + \right.$$

$$\left. + \frac{2k}{n^2T^2}\left(1 - e^{-nT}\right)\right].$$

Výraz v závorce s rostoucí dobou zkracování T se zmenšuje. Jeho největší hodnota jest pro $\lim T = 0$. V tomto případě jest práce, kterou původní jednotka objemová při nekonečně rychlém zkrácení na původní délku vydá,

$$L = \tfrac{1}{2}\, E\lambda_0^2\, (1 + k),$$

což jest zase táž hodnota, jako práce na nekonečně rychlé protažení potřebná; můžeme tudíž zase považovati výraz tento za energii objemové jednotky. Zkracuje-li se však drát rychlostí konečnou ($T > 0$), jest vrácená práce menší. V tomto případě se totiž dopružovací napětí relaxací zmenšuje a koná se tudíž menší práce. Při nekonečně rychlém zkrácení drátu nemá relaxace času, aby vzniklé dopružovací napětí zmenšovala. Napětí při každé deformaci při prodlužování i při zkracování je tudíž stejné, proto též práce drátem vrácená se rovná práci vykonané.

Tyto dva krajní případy jsou však jediné, při nichž i tělesa s dopružováním dodanou práci plně vracejí. V každém jiném případě vracejí takováto tělesa práce méně, než kolik bylo na jejich deformaci vykonáno.

8. *Energie objemové jednotky deformovaného tělesa.* Úvahy předešlého odstavce vedou k otázce, jak máme definovati energii deformovaného tělesa, jež jeví dopružování. Je to zajisté největší práce, kterou těleso může vykonati při přechodu z deformovaného stavu do stavu nedeformovaného.. Kdyby nebylo dopružování, byla by tato energie L vztažená na jednotku objemovou při vnitřním napětí S a relatívním prodloužení λ_0

$$L = \frac{1}{2} S\lambda_0 = \frac{1}{2} S^2/E = \frac{1}{2} E\lambda_0^2 .$$

Ve dvou případech již jsme tuto energii vypočetli. Je-li těleso v katastatickém stavu, jest jeho energie

$$L = \frac{1}{2} E\lambda_0^2 = \frac{1}{2} S'\lambda_0 ,$$

neboť katastatické vnitřní napětí jest $S' = E\lambda_0$.

Bylo-li těleso nekonečně rychle protaženo, jest jeho energie

$$L = \frac{1}{2} (1 + k) E\lambda_0^2 = \frac{1}{2} S_1\lambda_0 ,$$

neboť v tomto případě skutečné vnitřní napětí $S_1 = (1 + k) E\lambda_0$.

Nutno uvážiti, zdali dostaneme týž výraz pro energii i v obecném případě, když skutečné napětí účinkem relaxace se zmenšilo na hodnotu S_0 tak, že $S_1 > S_0 > S'$; při tom znamená $S_1 = (1 + k) E \lambda_0$ skutečné napětí vzniklé nekonečně rychlou deformací, $S' = E\lambda_0$ napětí katastatické. Rozdíl $\sigma = S_0 - S'$ znamená okamžité dopružovací napětí.

Největší možnou práci dostaneme z deformovaného tělesa tímto způsobem: Především necháme zmenšiti se původní relativní prodloužení λ_0 na takovou hodnotu λ_1, aby se nově vzniklým dopružovacím napětím (ovšem záporným) původní dopružovací napětí σ právě zrušilo. Musí tudíž býti

$$\sigma = k E (\lambda_0 - \lambda_1), \quad \text{z čehož} \quad \lambda_1 = \lambda_0 - \sigma/kE .$$

Tím plně využitkujeme dopružovacího napětí, neboť neponecháme relaxaci času, aby zmenšila toto dopružovací napětí bez konání práce. Při jakémkoli pozvolném zmenšování λ, jak se ukáže, dostali bychom vždy práci menší. Tím jsme převedli těleso do stavu katastatického. Další zmenšování λ vykonáme nekonečně zvolna, aby při tom nová dopružovací napětí nemohla vznikati; při rychlejším zmenšování λ bylo by vznikající dopružovací napětí záporné a zmenšovalo by tudíž práci tělesem konanou.

Práci, kterou objemová jednotka v prvé části vykoná, označíme L_1. Předpokládáme nejprve, že se zkracování děje po dobu T podle vztahu

$$\lambda = \lambda_0 - (\lambda_0 - \lambda_1)\frac{t}{T}.$$

Dosadíme-li výraz tento do základní rovnice (2), dostáváme podmínečnou rovnici pro skutečné napětí S

$$\frac{dS}{dt} + nS = nE\lambda_0 - (1+k)\frac{E(\lambda_0 - \lambda_1)}{T} - \frac{nE(\lambda_0 - \lambda_1)}{T}\cdot t,$$

jejímž obecným integrálem jest

$$S = C_0\, e^{-nt} + E\lambda_0 - \frac{E(\lambda_0 - \lambda_1)}{n\,T}(n\,t + k).$$

V čase $t = 0$ bylo skutečné napětí

$$S = S_0 = S' + \sigma = E\lambda_0 + kE(\lambda_0 - \lambda_1),$$

z čehož plyne hodnota integrační konstanty

$$C_0 = kE(\lambda_0 - \lambda_1)\left(1 + \frac{1}{n\,T}\right).$$

Práce, kterou při tom elastická napětí v jednotce objemové vykonají, jest

$$L_1 = -\int_0^T S\frac{d\lambda}{dt}\,dt$$

Po dosazení a provedení integrace dostáváme pro ni

$$L_1 = \frac{E}{2}(\lambda_0 - \lambda_1)\left\{\lambda_0 + \lambda_1 + 2k(\lambda_0 - \lambda_1)\frac{1-(1+n\,T)\,e^{-nT}}{n^2\,T^2}\right\}.$$

Práce tato jest největší pro $\lim T = 0$ a činí pak

$$L_1 = \tfrac{1}{2}E(\lambda_0 - \lambda_1)\left[\lambda_0 + \lambda_1 + k(\lambda_0 - \lambda_1)\right].$$

K této práci dlužno připočísti druhou část práce L_2, kterou těleso vykoná tím, že z katastatického stavu definovaného relativním prodloužením λ_1 přejde nekonečně zvolna do stavu nedeformovaného. Tato část práce jest podle předešlého odstavce táž, jako kdyby dopružování neexistovalo, a činí tudíž

$$L_2 = \tfrac{1}{2}E\lambda_1^2.$$

Součet obou prací L určuje **největší** práci, kterou objemová jednotka může vykonati, a jest tedy její energií. Jest

$$L = L_1 + L_2 = \tfrac{1}{2}E\lambda_0^2 + \tfrac{1}{2}kE(\lambda_0 - \lambda_1)^2.$$

Do výrazu tohoto zavedeme nyní za relativní prodloužení λ_1 původní napětí skutečné S_0 a katastatické S'. Jest podle předešlého

$$\lambda_0 - \lambda_1 = \frac{\sigma}{kE} = \frac{S_0 - S'}{kE}, \qquad S' = E\lambda_0,$$

načež po dosažení dostáváme

$$L = \frac{1}{2} S'\lambda_0 + \frac{1}{2kE}(S_0 - S')^2.$$

Výraz tento dá se transformovati, použijeme-li ještě hodnoty pro napětí

$$S_1 = (1 + k)\, E\lambda_0 = (1 + k)\, S',$$

které by vzniklo nekonečně rychlou deformací λ_0 ze stavu nedeformovaného, do zajímavého tvaru

$$L = \frac{1}{2} S_0\, \lambda_0 - \frac{1}{2kE}(S_1 - S_0)\,(S_0 - S'). \qquad (6)$$

Prvý člen, stanovený polovičním součinem ze skutečného napětí S_0 a relativního prodloužení λ_0, shoduje se se vzorcem, podle něhož lze počítati energii objemové jednotky v tělese bez dopružování. K tomuto členu přistupuje však ještě korrekce určená druhým členem. Tato korekce odpadá jedině ve dvou případech.

1. Je-li $S_0 = S_1$, čili, bylo-li těleso uvedeno nekonečně rychle do relativního prodloužení; pak jest ovšem

$$L = \tfrac{1}{2} S_1\, \lambda_0 = \tfrac{1}{2}(1 + k)\, E\lambda_0^2,$$

jak jsme dříve nalezli.

2. Je-li $S_0 = S'$, což znamená, že je těleso ve stavu katastatickém; pak jest zase

$$L = \tfrac{1}{2} S'\lambda_0 = \tfrac{1}{2} E\lambda_0^2,$$

jak jsme rovněž již dříve odvodili.

Byl-li drát z rovnovážného stavu uveden do prodloužení λ_0 a v něm po nějakou dobu ponechán, jest jeho skutečné napětí S_0 menší než napětí S_1 vznikající po nekonečně rychlém prodloužení, ale větší než napětí katastatické S', tedy $S_1 > S_0 > S'$; korrekce vlivem dopružování je v tomto případě **záporná**.

Lze však dosáhnouti toho, že $S_0 > S_1$. Na př. drát nejprve stlačíme (relativní prodloužení $-\lambda_2$) a v tomto stavu jej dosti dlouho podržíme, až nastane stav katastatický. Když potom drát rychle přes původní polohu uvedeme až do prodloužení relativního $+\lambda_0$, vznikne v něm vedle katastatického napětí $S' = E\lambda_0$ ještě dopružovací napětí $\sigma = k \,.\, E(\lambda_2 + \lambda_0)$, takže celkové skutečné napětí S_0 jest

$$S_0 = E\lambda_0 + k \,.\, E(\lambda_2 + \lambda_0) = (1 + k)\, E\lambda_0 + kE\lambda_2 = S_1 + kE\lambda_2$$

větší než napětí S_1 příslušné drátu uvedenému do prodloužení λ_0 z rovnovážné polohy. V tomto případě jest korrekční člen ve vzorci pro energii objemové jednotky kladný. Chceme-li tudíž veškerou energii elastickou zužitkovati, musíme ve smyslu předchozí úvahy nejprve nekonečnou rychlostí převésti jej do katastatického stavu, jenž je však určen záporným prodloužením $-\lambda_2$ a odtud teprve jej nekonečně zvolna necháme protahovati, až se vrátí do původní nedeformované polohy. Zjev tento je v dobré shodě s pozorováním, jak se chová drát, byl-li napřed vychýlen na jednu stranu, v tomto stavu podržen, pak vychýlen na druhou stranu a puštěn. Zpravidla se tento zjev demonstruje na drátu zkrucovaném. Drát vrátí se do původní polohy a přejde ještě na druhou stranu, pak teprve se vrací do původní polohy. Drát chová se tak, jakoby nejprve reagoval na poslední výchylku (pohyb zpětný přes rovnovážnou polohu) a pak teprve na předcházející výchylku (pohyb do původní polohy rovnovážné). Vzorec (6) pro energii objemové jednotky, i když neznamená úplné vysvětlení tohoto zjevu, ukazuje aspoň možnost jeho (srovn. výklad v odst. 10).

Zavedeme-li do výrazu (6) pro energii objemové jednotky pouze veličiny charakterisující okamžitý stav látky, totiž okamžité skutečné napětí S_0 a relativní prodloužení λ_0, dostáváme

$$L = \frac{1}{2}\, E\lambda_0^2 + \frac{1}{2kE}\,(S_0 - E\lambda_0)^2 = \frac{1}{2}\, E\lambda_0^2 + \frac{\sigma^2}{2kE}.$$

Kdyby nebylo dopružování, byla by tato energie $\frac{1}{2}\, E\lambda_0^2$. Ve skutečnosti jest vždy větší a to výraz úměrný čtverci dopružovacího napětí σ. Relaxací se však toto dopružovací napětí zmenšuje a proto energie klesá, měníc se patrně v teplo.

9. *Thermodynamická theorie napínaného drátu.* Úvahy předcházejícího odstavce vedou k poznání, že účinkem dopružování vznikají v drátu změny teplotní. Takovéto změny vznikají

však i v drátu dokonale pružném; bude proto zajímavo studovati napínání drátu ze stanoviska thermodynamického. Když drát dokonale pružný náhle napneme, ochladí se poněkud a je proto jeho prodloužení menší, než by bylo beze změny teploty. Toto ochlazení se časem vyrovnává teplem dodávaným z okolí; se vzrůstající teplotou se tudíž drát dále prodlužuje, až při vyrovnání teplot nabude své konečné délky. Jak patrno, průběh tohoto zjevu jest kvalitativně týž jako při dopružování napínaného drátu. V tomto smyslu jeví vlastně „dopružování" i dokonale pružné plyny. Působíme-li na píst uzavírající ve válci plyn stálým tlakem, stlačí se plyn nejprve adiabaticky, při čemž se oteplí; je proto jeho zmenšení objemové menší než podle zákona Boyleova. Teprve pozvolným vyrovnáváním teplot se zmenšuje objem plynu až na hodnotu určenou zákonem Boyleovým. Průběh tohoto zjevu je zase zcela obdobný jako při dopružování; katastatickému stavu odpovídá při tom stav teplotní rovnováhy.

Dokonale pružný drát na jednom konci upevněný, na druhém volný, má délku l a abs. teplotu T. Na volném konci podléhá úhrnnému tahu P. Volíme-li za neodvisle proměnné P a T, jest jeho délka l i vnitřní energie U funkcí těchto proměnných. Zvětší-li se tah o dP a teplota o dT, zvětší se jeho vnitřní energie jednak o dodané teplo $d'Q$, jednak o vykonanou práci $d'A$; čárkováním u differenciačního znaménka budiž naznačeno, že příslušné vzrůsty veličin nejsou úplnými differenciály. Vykonaná práce jest

$$d'A = P . dl = P\left(\frac{\partial l}{\partial T}\, dT + \frac{\partial l}{\partial P}\, dP\right).$$

Dodané teplo, měřené v mechanických jednotkách, jest

$$d'Q = C . dT + m . dP.$$

Koefficient m znamená teplo, jež je třeba dodati drátu při jednotkovém zvýšení tahu, nemá-li se při tom jeho teplota změniti. Úlohou (ovšem známou) bude vyšetřiti toto teplo. Celkové zvýšení vnitřní energie jest

$$dU = d'Q + d'A = \left(C + P\frac{\partial l}{\partial T}\right) dT + \left(m + P\frac{\partial l}{\partial P}\right) dP.$$

Výraz tento jest úplným differenciálem, což vede ke vztahu

$$\frac{\partial C}{\partial P} + \frac{\partial l}{\partial T} = \frac{\partial m}{\partial T}$$

V dokonale pružném tělese jsou takovéto změny zvratnými a musí tudíž vzrůst entropie

$$\frac{d'Q}{T} = \frac{C}{T}\,dT + \frac{m}{T}\,dP$$

býti rovněž úplným differenciálem, což vede k další podmínce

$$\frac{1}{T}\frac{\partial C}{\partial P} = \frac{1}{T}\frac{\partial m}{\partial T} - \frac{m}{T^2}$$

anebo

$$m = T\left(\frac{\partial m}{\partial T} - \frac{\partial C}{\partial P}\right).$$

Srovnáním této podmínky s předcházející plyne

$$m = T\,\frac{\partial l}{\partial T} = \alpha l T$$

neboť $\partial l/\partial T$ znamená vzrůst délky při zvýšení teploty 1° C, což jest αl, značí-li α příslušný koefficient tepelné roztažnosti.

Pro jednoduchost předpokládáme, že má drát kruhový průřez o poloměru r. Napneme-li jej náhle napětím S_0 (na cm^2), je celkový tah $P = \pi r^2 . S_0$; nedodáme-li drátu teplo, ochladí se z původní teploty T_0 (jako okolí) na teplotu T_1 podle vztahu

$$T_0 - T_1 = \frac{m}{\pi r^2 l \,.\, sc} \,.\, \pi r^2 S_0 = \frac{\alpha T_0}{sc} \,.\, S_0 \,. \qquad (7)$$

Při tom znamená s jeho specifickou hmotu a c specifické teplo. Toto ochlazení se vyrovnává teplem z okolí. Při tenkém drátu možno zanedbati účinek vedení tepla vedle tepla zářením dodaného. Poněvadž jde jen o malé rozdíly tepelné, jest teplo dQ zářením dodané úměrno rozdílu teplot $(T_0 - T)$, mimo to povrchu $2\pi rl$ a době dt tedy

$$dQ = K \,.\, 2\pi rl\,(T_0 - T) .\, dt,$$

značí-li K konstantu úměrnosti. Tímto teplem stoupne teplota drátu o dT podle vztahu

$$dT = \frac{dQ}{\pi r^2 lsc} = \frac{2K}{rsc}\,(T_0 - T) \,.\, dt$$

Integrací této rovnice dostáváme pro časový vzrůst teploty

$$T_0 - T = \mathrm{konst} \,.\, e^{-\frac{2Kt}{rsc}} \,.$$

V čase $t = 0$ byla teplota drátu $T = T_1$ určená vzorcem (7), z čehož plyne

$$T_0 - T = \frac{\alpha T_0}{sc} \,.\, S_0 \,.\, e^{-\frac{2Kt}{rsc}} \,.$$

Délka drátu v čase t jest pak

$$l = l_0 \left[1 - \alpha (T_0 - T)\right] + l_0 \frac{S_0}{E}$$

anebo $$l = l_0 + l_0 \frac{S_0}{E} - l_0 \frac{\alpha^2 T_0}{sc} \,.\, S_0 \,.\, e^{-\frac{2K}{rsc} \,.\, t}$$

Relativní prodloužení drátu λ vzrůstá tudíž s dobou t podle zákona

$$\lambda = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{S_0}{E} - \frac{\alpha^2 T_0}{sc} \,.\, S_0 \, e^{-\frac{2K}{rsc} \,.\, t}, \tag{8}$$

což je vztah shodný se vztahem (4) odvozeným v odst. 6., podle něhož roste relativní prodloužení drátu napiatého při dopružování, až ovšem na význam konstant.

Uvedená úvaha vede k otázce, není-li dopružování vůbec jenom zjevem thermodynamickým. Pak by pro konstantu dopružování k plynulo ze srovnání rovnic (4) a (8)

$$\frac{k}{1 + k} = \frac{\alpha^2 T_0}{sc} \,.\, E.$$

Propočteme velikost konstanty k pro stříbro, jež jeví zřetelné dopružování, a to pro teplotu $18^0 C$, tedy $T = 291^0$. Podle Valouchových tabulek jest:

$$\alpha = 184 \,.\, 10^{-7}, \qquad s = 10{\cdot}5 \frac{g}{cm^3}.$$

$$E = 7500 \frac{kg}{mm^2} = 7{\cdot}36 \,.\, 10^{11} \frac{dyn}{cm^2};$$

$$c = 0{\cdot}055 \frac{kal.}{stupeň} = 0{\cdot}055 \,.\, 4{\cdot}2 \,.\, 10^7 \frac{erg}{stupeň}$$

Z hodnot těchto plyne

$$k = 3 \,.\, 10^{-3}$$

To znamená: napiatý drát stříbrný protáhne se účinkem ochlazení ihned o $3^0/_{00}$ méně, než kolik by příslušelo danému napětí při nezměněné teplotě; s rostoucí dobou se pak protahuje podle exponenciálního zákona (6), až se toto $3^0/_{00}$ zmenšení vyrovná. Přímá měření o protahování drátu stříbrného nebyla dosud konána a nelze tudíž rozhodnouti otázku o thermodynamické povaze dopružování. Autor soudí, že toto „thermodynamické" dopružování jest jen menší částí celého pozorovaného dopružování. Neboť drát jeví dopružování také při zkrucování. Při tom vzniká v něm ovšem také nepatrná změna teploty, jež však může míti vliv pouze na jeho délku, ne však na zkroucení. Dopružování zkrouceného drátu tudíž thermodynamicky vysvětliti se nedá.

V jedné věci se však „thermodynamické" dopružování liší od ryze mechanického dopružování. Pro relaxační rychlost n „thermodynamického" dopružování plyne ze srovnání vzorců (3) a (6)

$$\frac{n}{1+k} = -\frac{2K}{rsc}.$$

Je tudíž relaxační rychlost „thermodynamického" dopružování nepřímo úměrná tloušťce drátu. To jest ovšem pochopitelno. Drát přijímá z okolí teplo svým povrchem, tedy úměrně poloměru, a tímto teplem se otepluje celý jeho objem úměrný dvojmoci poloměru. Při tlustším drátu postupuje oteplování tudíž volněji (nepřímo úměrně s poloměrem). Podle mechanické theorie dopružování nezávisí však rychlost relaxační na poloměru drátu.

10. *Drát protažený a puštěný.* V praksi pozoruje se dopružování zpravidla tím, že se drát určitým způsobem deformuje (obyčejně zkroutí), v této deformaci se po jistou dobu udržuje a pak pustí. Měří se v jednotlivých dobách jeho odchylky od původní rovnovážné polohy. Takto na př. studoval Rehkuh[9]) dopružování při torsi stříbrného a skleněného vlákna, Tobusch (l. c) při torsi ocelové spirály, což ovšem znamená ohyb drátu. Budeme řešiti tento případ jako dosud pro podélné protažení drátu.

Drát dokonale odpočinutý budiž protažen na relativní prodloužení λ_0 a budiž v této deformaci udržován po dobu T. Za předpokladu okamžitého protažení drátu jest časový průběh vnitřního napětí S drátu určen vzorcem (3) odvozeným v 5. odstavci

$$S = E\lambda_0 (1 + ke^{-nt}).$$

a jest tudíž po době T

$$S_0 = E\lambda_0 (1 + ke^{-nT}).$$

Je-li nyní drát puštěn, vznikne v něm ovšem podélné vlnění, k němuž však přihlížeti nebudeme a omezíme se zase na „pseudostatické" řešení. Za tohoto předpokladu po puštění drát se ihned

---

[9]) F. Rehkuh, Wied. Ann. 35. 476. 1888.

zkrátí tak, že jeho relativní prodloužení jest pouze λ_1 a skutečné vnitřní napětí se zmenší na nullu. Musí tudíž platiti vztah

$$S_0 = (1 + k)\,E\,(\lambda_0 - \lambda_1),$$

z čehož plyne

$$\lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\lambda_0}{1+k}\left(1 + ke^{-nT}\right) = \frac{k\lambda_0}{1+k}\left(1 - e^{-nT}\right).$$

Další zkracování drátu stanoví základní rovnice (2), položíme-li v ní skutečné napětí S rovno nulle, tudíž

$$(1 + k)\frac{d\lambda}{dt} + n\lambda = 0.$$

Čítáme-li čas od puštění drátu, dostáváme integrací

$$\lambda = \lambda_1\, e^{-\frac{n}{1+k}t} = \frac{k\lambda_0}{1+k}\left(1 - e^{-nT}\right).\, e^{-\frac{n}{1+k}t}.$$

Podle této rovnice má se tudíž puštěný drát vraceti do původní rovnovážné polohy. Skutečná měření, která konali Rehkuh a Tobusch, však jeví odchylky od tohoto zákona. Propočteme-li z prvých časových pozorování kterékoliv jejich serie konstanty vzorce, ukazuje se, že v další době přibližuje se drát své rovnovážné poloze volněji, než žádá theorie. Není ovšem nesnadno nalézti příčinu nesouhlasu. Aby totiž odstranili účinek rušivý vznikajících kmitů, užívají pozorovatelé silného tlumení, čímž se ovšem průběh zjevu značně pozmění. Tobusch na př. používal při torsi ocelové spirály (tedy ohybu ocelového drátu) známého vzduchového tlumení podle Töplera. V bubnu rozděleném čtyřmi příčkami sahajícími skoro do středu pohybuje se kříž složený ze čtyř křídel, jež jsou jen o málo menší než vnitřek bubnu. Za takového poměrně volného pohybu jest odpor vzduchu způsoben hlavně vnitřním třením a je tudíž úměrný první mocnině rychlosti. Pak ovšem při puštění drátu nemůže nastati příslušná nová poloha okamžitě, nýbrž účinkem tlumení zmenšuje se celá původní deformace jen postupně. Proto na počátku pozorování jeví se skutečné zmenšování výchylky větším, než by bylo při pouhém dopružování, jak také z jejich pozorování vyplývá.

Propočítáme proto vyšetřovaný případ se zřetelem k tlumení. Místo relativního prodloužení λ nutno zavésti úchylku od rovnovážné polohy u, jež jest úměrná relativnímu prodloužení, tedy $\lambda = C \,.\, u$. Po puštění drátu určen jest jeho pohyb zase základní rovnicí (2), ale vnitřní napětí S není nullou, nýbrž rovná se vnější síle, t. j. odporu vzduchu, tudíž

$$S = - A \frac{du}{dt}$$

Dosadíme-li tyto veličiny do základní rovnice (2), dostáváme pohybovou rovnici

$$- A \frac{d^2u}{dt^2} - An \frac{du}{dt} = (1 + k)\, E \,.\, C \frac{du}{dt} + nECu$$

anebo, označíme-li pro stručnost $m = EC/A$,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + [n + (1 + k)\, m] \frac{du}{dt} + nmu = 0.$$

Rovnici této vyhovuje obecný integrál tvaru

$$u = K_1 e^{-r_1 t} + K_2 e^{-r_2 t}, \tag{9}$$

při čemž hodnoty r_1 a r_2 jsou kořeny rovnice

$$r^2 - [n + (1 + k)\, m]\, r + nm = 0.$$

Oba tyto kořeny jsou vždy realné a kladné. Předpokládáme-li, že konstanta dopružování k je malá, dostáváme místo nepřehledných vzorců obecných prvé přiblížení

$$r_1 = n\left(1 - \frac{km}{m-n}\right), \qquad r_2 = m\left(1 + \frac{km}{m-n}\right).$$

Konstanta m charakterisuje tlumení, konstanta n dopružování. Jak patrno z obecného vzorce (9), každý z obou zjevů pro sebe by způsobil, že by se původní výchylka u_0 zmenšovala podle exponenciální funkce e^{-rt}. Při současném působení obou příčin zmenšuje se tudíž původní výchylka podle součtu dvou exponenciál, ale koefficienty u času t jsou poněkud jiné; korrekční členy s koefficientem k ve vzorcích pro r_1 a r_2 stanoví účinek vzájemného působení obou zjevů. Vzorec tvaru (9) odvodil ze svých pokusů Neesen[10]), což tedy potvrzuje tuto theorii. Kritické zpracování dosavadního materiálu pozorovacího podle této theorie a případné doplnění vlastními pozorováními ponechává si autor pro práci zvláštní.

Bylo již v odst. 8. ukázáno, že lze dosáhnouti toho, že počáteční vnitřní napětí S_0 může býti větší než napětí

[10]) F. Neesen, Pogg. Ann. *153*. 498. 1874.

$S_1 = (1 + k)\, E\lambda_0$, jež přísluší drátu z rovnovážné polohy nekonečně rychle protaženému. Stačí podrobiti drát (nebo tyč) před tím dosti dlouho trvající výchylce opačného směru. V tomto případě vyplývá ze vzorce

$$S_0 = (1 + k)\, E\, (\lambda_0 - \lambda_1)$$

pro λ_1 hodnota záporná. To znamená, že takovýto drát ihned po puštění přejde přes rovnovážnou polohu do výchylky opačného směru a odtamtud teprve zvolna se vrací k původní rovnovážné poloze. Tím je tedy zpětná výchylka při dopružování experimentelně zjištěná touto theorií uspokojivě vyložena.

11. *Vynucené kmity.* Na volný konec tyče působí ve směru podélném periodické napětí S určené vztahem

$$S = A \sin Nt,$$

v němž N znamená 2π - násobný kmitočet, což budeme nazývati frekvencí. Omezíme se zase na t. zv. „pseudostatické“ řešení tím, že nebudeme přihlížeti k vlastním kmitům tyče. Kdyby nebylo dopružování, bylo by okamžité relativní prodloužení

$$\lambda = \frac{A}{E} \sin Nt,$$

tyč by konala soudobé kmity s amplitudou A/E.

Při dopružování jest tento děj charakterisován podmínečnou rovnicí

$$(1 + k) E \frac{d\lambda}{dt} + n E\lambda = A\, (n \sin Nt + N \cos Nt),$$

již dostáváme po dosazení do základní rovnice (2). Za předpokladu, že tyč byla původně nedeformována a dokonale odpočata, jest řešením v tomto případě

$$\lambda = \frac{A}{(1 + k)^2 E (n_1^2 + N^2)} \{knNe^{-n_1 t} + [n_1^2 + (1 + k) N^2] \sin Nt + \\ - knN \cos Nt\},$$

při čemž zavedeno zkrácené označení

$$n_1 = \frac{n}{1 + k}.$$

Tyč kmitá se stejnou sice periodou, ale s fázovým zpožděním kolem střední polohy, jež nesplývá s původní rovnovážnou polohou. Střední poloha kmitů určena jest neperiodickým členem; s rostoucí dobou blíží se podle exponenciálního zákona původní rovnovážné poloze. Tato odchylka střední polohy způsobena jest počátečním impulsem síly (asi jako nutační vlnky při studiu praecesse). Poněvadž relaxační rychlost n jest malá proti frekvenci N (nejedná-li se o velmi volné kmity), jest tato odchylka také velmi malou. Při ustáleném stavu ostatně mizí, pročež k ní nebudeme v dalším přihlížeti.

Znamená-li B amplitudu vynucených kmitů a t_0 fázové zpoždění (časově vyjádřené), lze psáti periodické členy ve tvaru

$$\lambda = B \sin N (t - t_0).$$

Ze srovnání obou výrazů plyne

$$B^2 = \frac{A^2}{(1+k)^4 E^2 (n_1^2 + N^2)^2} [(n_1^2 + N^2 + kN^2)^2 + k^2 N^2 n^2]$$

$$tg\, Nt_0 = \frac{kNn}{n_1^2 + (1+k) N^2}.$$

Za předpokladu, že dopružovací konstanta k jest malá a že relaxační rychlost n je proti frekvenci N rovněž veličinou malou prvého řádu, dostáváme v plném přiblížení

$$B = \frac{A}{(1+k) E}, \qquad Nt_0 = \frac{kn}{N}.$$

Amplituda vynucených kmitů je v poměru $1 : (1+k)$ menší než v případu, kdyby nebylo dopružování. Výraz Nt_0 znamená fázové zpoždění vyjádřené úhlem v míře obloukové a jest patrně veličinou malou druhého řádu. V prvém přiblížení lze je tudíž zanedbati; tyč kmitá přibližně bez fázového zpoždění.

12. *Zákony dopružování při obecné deformaci.* Dosud jsme uvažovali pouze deformace určené jediným parametrem, za nějž jsme zvolili relativní prodloužení. Úkolem dalším bude zevšeobecniti tuto theorii na případ libovolných deformací, určených 6 deformačními složkami

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad z_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

$$y_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad x_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Při tom znamenají u, v, w složky výchylky bodu x, y, z z rovnovážné jeho polohy, vzaté ve směru souřadnicových os. Omezíme se při tom na tělesa isotropická.

Při dané deformaci jest soustava skutečných napětí určena rovněž 6 složkami

$$X_x,\ Y_y, Z_z, Y_z = Z_y,\ Z_x = X_z, X_y = Y_x.$$

Při tom znamená X_n složku síly ve směru X působící na jednotku plochy, jejíž vnější normála má směr n. Jsou tudíž X_x, Y_y, Z_z normální napětí, Y_z, Z_x, X_y napětí tangenční neboli střižná.

V tělese pružném bez dopružování tato napětí jsou jednoznačně určena složkami deformací, tudíž při stálé deformaci jsou také stálá. Ale v tělese jevícím dopružování tato napětí i při stálé deformaci se mění, blížíce se s časem jistému konečnému stavu, jejž nazýváme katastatickým. Složky napětí v katastatickém stavu označíme zase čárkováním, tedy

$$X'_x,\ Y'_y,\ Z'_z,\ Y'_z,\ Z'_x,\ X'_y.$$

Jedině tato katastatická napětí jsou jednoznačně určena deformačními složkami $x_x, \ldots, y_z, \ldots$ Rozdíly napětí skutečného a katastatického nazveme zase složkami dopružovacího napětí a označíme je řeckými písmeny, tedy

$$\xi_x = X_x - X'_x, \ldots, \eta_z = Y_z - Y'_z, \ldots$$

Pro mathematickou formulaci zákonů dopružování učiníme jednoduchý předpoklad, že soustava skutečných napětí blíží se stejnoměrně soustavě katastatických napětí, je-li deformace udržována stálou, a to s rychlostí úměrnou velikosti dopružovacích napětí. A dále, že při nové deformaci tělesa vzniká nová soustava dopružovacích napětí úměrných napětím katastatickým. To znamená, že pro kteroukoli složku dopružovacích napětí platí týž zákon

$$d\sigma = -n \,.\, \sigma\, dt + k \,.\, dS',$$

který jsme odvodili pro změnu dopružovacího napětí v odst. 4., a že konstanty n a k mají vždy touž hodnotu. Správnost tohoto posledního předpokladu nutno ovšem odůvodniti. Z pojmu isotropického tělesa ovšem vyplývá, že pro všechna 3 napětí normální musí platiti týž zákon s týmiž konstantami, neboť není důvodu pro opak. Ale bylo by myslitelno, že pro napětí tangenční platí sice podobný zákon, ale s jinými konstantami n a k. Dokážeme, že by takovýto předpoklad vedl k rozporu.

Mějme na mysli těleso dokonale odpočinuté, jež ve dvou směrech navzájem kolmých protáhneme a ve třetím směru kolmém k oběma předešlým stlačíme. Tyto tři směry jsou pak směry hlavních napětí, z nichž dvě jsou kladná (na př. X_x a Y_y) a třetí záporné (Z_z). Skutečná napětí jsou pak

$$X_x = X'_x + \xi_x = X'_x + kX'_x = (1 + k)\, X'_x,$$

podobně

$$Y_y = (1 + k)\, Y'_y, \qquad Z_z = (1 + k)\, Z'_z$$

a dále jest

$$Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

Ze známé úvahy pomocí tetraedru Cauchy-ova vyplývá, že složky napětí působícího na plochu o vnější normále n jsou lineárnou funkcí těchto tří napětí, v daném případě

$$X_n = X_x \,.\, \cos nx, \qquad Y_n = Y_y \,.\, \cos ny, \qquad Z_n = Z_z \,.\, \cos nz.$$

V tomto případě, kdy jedno z hlavních napětí má opáčné znamení než druhá dvě, existuje v tělese t. zv. střižný kužel té vlastnosti, že každá jeho tečná rovina podléhá pouze napětí tangenčnímu (napětí normální rovná se nulle). Ostatně lze existenci takovýchto ploch odvoditi jednoduchou úvahou. Mění-li se normála plochy spojitě ze směru osy X do směru osy Z, musí původní kladné napětí (normální) přejíti do záporného napětí (zase normálního). Při přechodu tom musí tudíž existovat plocha, na níž jest normální napětí nullou a na niž působí tudíž pouze napětí tangenční (od nully odlišné). Velikost tangenčního napětí T na tečnou rovinu střižného kužele jest lineárnou funkcí hlavních napětí a musí tudíž pro ně platiti

$$T = (1 + k) \,.\, T',$$

znamená-li T zase katastatické napětí tangenční. Tím je tedy dokázáno, že pro tyto plochy a z důvodů isotropie pro všechny plochy konstanta dopružovací k musí míti pro tangenční i normální napětí hodnotu touž. Jiná hodnota odporovala by rovnovážnému stavu tetraedru Cauchy-ova.

Obdobnou úvahou dokážeme totéž i pro relaxační rychlost n. Vzbuzenou deformaci udržujeme nyní stálou. Hlavní dopružovací napětí zmenšují se pak s dobou t podle vztahu

$$\xi_x = (\xi_x)_0 \,.\, e^{-nt} = kX'_x \,.\, e^{-nt}$$

a jsou tudíž skutečná napětí v čase t

$$X_x = X'_x + \xi_x = X'_x + kX'_x \,.\, e^{-nt} = X'_x (1 + ke^{-nt}),$$

podobně

$$Y_y = Y'_y (1 + ke^{-nt}), \quad Z_z = Z'_z (1 + ke^{-nt}).$$

Na každou tečnou rovinu střižného kužele působí tudíž pouze střižné napětí T, jež je lineárnou funkcí hlavních napětí; musí se tudíž zmenšovati s dobou rovněž podle vztahu

$$T = T' (1 + ke^{-nt}),$$

což znamená, že relaxační rychlost n tangenčního napětí je stejná jako pro napětí normální.

Výsledkem této úvahy jest důležitý poznatek, že dopružování isotropického tělesa jest charakterisováno pouze dvěma konstantami k a n. Z nich dopružovací konstanta k znamená velikost dopružovacího napětí vznikajícího tím, že katastatické napětí náhle vzroste o jedničku. Relaxační rychlost n znamená pak rychlost, s jakou se dopružovací napětí zmenšuje při jednotkové velikosti; převratná hodnota $\tau = 1/n$ znamená relaxační dobu, za kterou při stálé deformaci klesne původní dopružovací napětí na $1/e$ část své hodnoty (e základ přirozených logaritmů).

13. *Základní pohybové rovnice při obecných deformacích.* Podle předešlého odstavce platí pro kteroukoli složku napětí skutečného S a katastatického S' vztah

$$d(S - S') = -n(S - S') \,.\, dt + k \,.\, dS'$$

anebo

$$nS + \frac{dS}{dt} = nS' + (1 + k) \frac{dS'}{dt}. \tag{10}$$

Při tom katastatické složky S' souvisí s deformačními složkami podle týchž vztahů jako v obyčejné theorii pružnosti.

Buďtež u, v, w složky výchylek bodu (x, y, z) v čase t. Relativní prodloužení ve směru os jsou pak

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

a tedy relativní zvětšení jednotky objemové

$$\vartheta = x_x + y_y + z_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Relativní změny pravých úhlů mezi směry, jež původně souhlasily s osami souřadnicovými, jsou

$$y_z = z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad z_x = x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Těmito 6 deformačními složkami jsou určeny složky katastatických napětí. Katastatické napětí X'_x působí ve směru osy X relativní prodloužení velikosti X'_x/E, ve směru druhých dvou os stejná relativní zkrácení $-\mu X'_x/E$; podobně napětí Y'_y a Z'_z. Při tom znamená E modul pružnosti a μ Poissonův koefficient příčné kontrakce. Jsou tudíž celková relativní prodloužení ve směru os

$$x_x = \frac{1}{E}(X'_x - \mu Y'_y - \mu Z'_z)$$

$$y_y = \frac{1}{E}(-\mu X'_x + Y'_y - \mu Z'_z)$$

$$z_z = \frac{1}{E}(-\mu X'_x - \mu X'_y + Z'_z).$$

Sečtením dostáváme vztah

$$\vartheta = \frac{1 - 2\mu}{E} \Theta',$$

znamená-li Θ' invariantní součet napětí

$$\Theta' = X'_x + Y'_y + Z'_z.$$

Z předchozí rovnice plyne

$$\Theta' = \frac{E}{1 - 2\mu} \cdot \vartheta.$$

Vztahy pro relativní prodloužení možno psáti ve tvaru

$$x_x = \frac{1}{E}[(1 + \mu) X'_x - \mu\Theta'] = \frac{1 + \mu}{E} X'_x - \frac{\mu}{1 - 2\mu} \vartheta,$$

z čehož plyne

$$\begin{aligned} X'_x &= \frac{E}{1 + \mu}\left[x_x + \frac{\mu}{1 - 2\mu}\vartheta\right] = \\ &= \frac{E}{1 + \mu}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{1 - 2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \end{aligned} \qquad (11)$$

a podobné dvě rovnice pro Y'_y a Z'_z.

Pro katastatická tangenční napětí platí podobně tytéž vzorce jako v obyčejné theorii pružnosti

$$Y'_z = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot y_z = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{12}$$

a podobné dvě rovnice pro Z'_x a X'_y.

Rovněž pohybové rovnice elementu prostorového jsou tytéž jako v obyčejné theorii pružnosti, ale musíme do nich dosaditi skutečná napětí $X_x, \ldots, Y_z \ldots$ Značí-li X, Y, Z složky vnější síly působící na jednotku objemovou a ϱ specifickou hmotu, jsou tyto pohybové rovnice

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \tag{13}$$

a podobné dvě rovnice.

Do těchto rovnic dlužno nyní místo skutečných napětí zavésti katastatická napětí a za ně pak podle vztahů (11) a (12) dosaditi parciální derivaci výchylek.

Differencujme rovnici (13) podle času a přidejme k ní touž rovnici násobenou relaxační rychlostí n, což symbolicky vyznačíme

$$\varrho\left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)X + \left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right).$$

Pro kteroukoliv složku napětí platí podle rovnice (10) za téhož symbolického označení

$$\left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)X_x = \left[n + (1+k)\frac{\partial}{\partial t}\right]X'_x.$$

Po dosazení tudíž dostáváme

$$\varrho\left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)X +$$
$$+ \left[n + (1+k)\frac{\partial}{\partial t}\right]\left(\frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z}\right).$$

Za katastatická napětí dosadíme nyní složky výchylek podle vztahů (11) a (12). Po malé úpravě z nich plyne

$$\frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\Delta u + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right],$$

užijeme-li pro stručnost Laplaceova symbolu Δ k označení

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Po dosazení dostáváme konečné pohybové rovnice v obecném případu při dopružování

$$\begin{aligned}
\varrho\left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)X + \\
&+ \frac{E}{2(1+\mu)}\left[n + (1+k)\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[\Delta u + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right], \\
\varrho\left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)Y + \\
&+ \frac{E}{2(1+\mu)}\left[n + (1+k)\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[\Delta v + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right], \qquad (14) \\
\varrho\left(n + \frac{\partial}{\partial}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left(n + \frac{\partial}{\partial t}\right)Z + \\
&+ \frac{E}{2(1+\mu)}\left[n + (1+k)\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[\Delta w + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right],
\end{aligned}$$

v nichž znamená jako dříve

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

14. *Podmínky počáteční a povrchové.* Základní pohybové rovnice (14) pro výchylky při dopružování jsou lineární parciální rovnice třetího řádu. Aby byl jimi problém určitě definován, musí býti dány též jednak podmínky časové, jednak podmínky povrchové.

V libovolném čase, jejž zvolíme za počátek časový, tedy pro $t = 0$, musí býti dán celý pohybový stav tělesa, t. j. výchylky, rychlosti a zrychlení každého bodu, tedy

$$u_0,\ v_0,\ w_0 = f(x, y, z),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_0, \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0 = f_1(x, y, z),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_0 = f_2(x, y, z),$$

při čemž ovšem každá funkce má pro různé výchylky různý tvar. Proti obyčejné theorii pružnosti jest novou podmínka, že musí býti dána též zrychlení. Z ryze mathematického stanoviska je to ovšem samozřejmé, poněvadž pohybové rovnice jsou v tomto případě třetího řádu. Jest však dobře uvědomiti si fysikální význam této nové podmínky.

Pohybový stav tělesa, nejevícího dopružování, jest v určitém čase stanoven pouze rozdělením výchylek a rychlostí. Zrychlení každého hmotného bodu jest pak jednoznačně určeno vnějšími silami a vnitřními napětími, jež jsou jednoznačně určena deformacemi tělesa, tedy rozdělením výchylek. V tělese jevícím dopružování jsou však deformacemi, tedy rozdělením výchylek určena pouze katastatická napětí. Vedle těchto katastatických napětí jsou však v tělese podle naší theorie ještě dopružovací napětí různá podle deformační cesty, na níž se těleso do daných deformací dostalo. Podle velikosti těchto dopružovacích napětí může tudíž v tělese i při stejných vnějších silách i při stejných deformacích býti celkové zrychlení různé. Je tudíž třeba znáti, jaká jsou skutečná zrychlení v určitém čase, což právě vyjadřuje třetí serie počátečních podmínek. Další změny zrychlení jsou pak již pohybovými rovnicemi (14) jednoznačně stanoveny.

Kdyby nebylo volného povrchu, uvedené tři serie počátečních podmínek by zaručovaly jednoznačnost řešení, nehledíme-li k možnému rovnoměrnému pohybu tělesa jako celku. Důkaz lze vésti obdobným způsobem, jak v dalším případě naznačíme.

Na volném povrchu tělesa musí býti mimo to známo buď rozdělení výchylek v každém čase nebo rozdělení vnějších povrchových sil v každém čase. Jsou ovšem možny také smíšené podmínky tím, že na jedné části povrchu jsou dány výchylky, na ostatní části povrchu vnější síly jakožto funkce času (na př. těleso na jedné části upevněné, na ostatním povrchu podrobené vnějším silám).

Mathematicky přístupnější je prvý případ, kdy jsou na povrchu dány výchylky u', v', w' jako funkce času a polohy. Předpokládejme na okamžik, že by existovala dvě různá řešení u_1, v_1, w_1 a u_2, v_2, w_2 vyhovující všem podmínkám i pohybovým rovnicím. Pak řešení rozdílové

$$u = u_1 - u_2, \quad v = v_1 - v_2, \quad w = w_1 - w_2$$

vyhovuje rovněž pohybovým rovnicím, dosadíme-li v nich za vnější síly X, Y, Z nullu, neboť ty rovnice jsou lineární. Dále je na celém povrchu pro každý čas

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

a v čase $t = 0$ je všude

$$u = 0, \ldots, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = 0, \ldots, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0 = 0, \ldots$$

Jsou tudíž v pohybových rovnicích v čase $t = 0$ všechny členy nullou až na členy $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}$, jež tudíž jsou také nullou. To znamená, že v časovém elementu dt druhé derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ se nezmění, zůstanou tedy vesměs nullami a jsou tudíž nullami i veškeré parciální derivace podle koordinat. Z toho plyne, že i po čase dt jsou zase třetí časové derivace nullami, proto i v dalším časovém elementu výchylky i všechny jejich derivace zůstávají nullami atd. Z toho plyne, že toto rozdílové řešení zůstává stále nullovým čili že obě předpokládaná řešení jsou shodná. Uvedenými podmínkami je proto jednoznačnost řešení zaručena.

Značně složitější je druhý možný případ povrchových podmínek, kdy jsou dány v každém čase vnější povrchové síly X_n, Y_n, Z_n působící na jednotkovou plochu povrchu, jehož vnější normála má směr n. Volme si na povrchu tenkou deštičku o nekonečně malé ploše, proti níž však tloušťka dn a tedy i plášť je nekonečně malý. Nemá-li se tato deštička dostati do pohybu s nekonečně velkým zrychlením, musí vnější povrchové síly působící na vnější základnu rovnati se vnitřním skutečným silám, působícím na druhou základnu deštičky. To vede k povrchové podmínce

$$X_n = X_x \,.\, \cos nx + X_y \,.\, \cos ny + X_z \,.\, \cos nz \tag{15}$$

a dvěma obdobným rovnicím. Skutečné vnitřní síly X_x atd. jsou s katastatickými silami X'_x atd. vázány vztahy

$$nX_x + \frac{\partial X_x}{\partial t} = nX'_x + (1 + k)\frac{\partial X'_x}{\partial t} \tag{16}$$

a podobnými 5 dalšími rovnicemi. Teprve tato katastatická napětí X'_x atd. jsou určena výchylkami na povrchu podle vztahů (11) a (12) předešlého odstavce. Obtíže mathematické způsobuje, že se může na povrchu měniti směr normály. Nelze proto přímo eliminovati z rovnic (15) a (16) skutečná napětí X_x atd., abychom dostali pak pomocí rovnic (11) a (12) povrchovou podmínku mezi vnějšími povrchovými silami X_n, Y_n, Z_n a výchylkami povrchu u_n, v_n, w_n. Povrchové podmínky jsou v tomto případě vyjádřeny souborem rovnic (15) a (16) ve spojení s rovnicemi (11) a (12). Pouze v případě, že by povrchová normála zachovávala stále týž směr, lze z uvedené soustavy eliminovati skutečná napětí i katastatická napětí, čímž dostáváme tři povrchové podmínky vížící výchylky na povrchu s vnějšími povrchovými silami. V tomto případě lze také obdobným způsobem jako dříve dokázati jednoznačnost řešení. (Dokončení.)

Příspěvek k theorii ochlazování desky.

Napsal Ph. Dr. **Karel Teige.**

Jest najíti rozdělení teploty v desce tloušťky d, je-li veličina a v rovnici pro teplotu u

$$a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (1.)$$

funkcí vzdálenosti od kraje desky $x=0$, a jsou-li místa $x=0$ a $x=d$ udržována na teplotě nullové a je-li dáno rozdělení teploty v čase $t=0$

$$u_{t=0}=f(x)\,.$$

Řešme rovnici (1.) methodou separací proměnných. Položme tedy

$$u=X\,.\,T,$$

čímž dostaneme rovnice

$$\frac{d^2X_n}{dx^2}=\frac{c_n}{a^2(x)}\,X_n\,,\qquad \frac{dT_n}{dt}=c_n\,.\,T_n\,.$$

Integrály rovnice prvé možno psáti ve tvaru

$$X_n^{(1)}=1+\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}\frac{c_n}{a^2(x_2)}\,dx_2+\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}\frac{c_n}{a^2(x_2)}\,dx_2\int_0^{x_2}dx_3\int_0^{x_3}\frac{c_n}{a^2(x_4)}\,dx_4$$
$$+\ldots,$$