Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

O křivkách, jichž normály hoví jisté podmínce

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 2-3, 109--119

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121365

Pour effectuer la construction, nous considérons les traces $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}_2$ des cônes σ, σ_1 sur un plan ϱ quelconque.

D'après les notions précédentes, en appliquant les procedés indiqués d'abord, on peut construire premièrement la conique $\mathfrak{u}_2$, puis $\mathfrak{u}_1$ même. Puis nous trouvous facilement $\mathfrak{u}$.

Nous voyons de ce qui précède que nous pouvons considérer les surfaces réglées données par une courbe gauche ou par une surface développable dont tous les hyperboloïdes osculateurs possèdent, par rapport à un plan arbitrairement donné, des pôles qui sont des points d'une autre courbe gauche, donnée d'abord.

En fin, nous donnons l'exemple d'une surface de quatrième ordre qui est donnée par une droite $\mathfrak{q}$ et par une conique Σ située sur un cône S de deuxième degré dont le centre S est le pôle commun du plan de la conique, par rapport aux tous hyperboloïdes osculateurs de la surface reglée. Dans le cas particulier le point S peut être le centre de tous ces hyperboloïdes. Si la droite $\mathfrak{q}$ rencontre la conique Σ ou si $\mathfrak{q}$ est situé généralement dans un plan tangent du cône S, nous aurons une une surface du troisième ordre. Si ces deux cas se preséntent simultanément, nous avons une surface du deuxième ordre.

O křivkách, jichž normály hoví jisté podmínce.

Dr. Ant. Pleskot v Plzni.

Budiž dána přímka p na ní bod M a mimo ní bod A. Je-li B libovolný bod křivky, již máme stanoviti, pak určeme osu úsečky AB, jež protne přímku p v bodě P. Označme $MP = t$ a určeme na p bod Q dle podmínky $MQ = f(t)$, při čemž $f(t)$ jest funkce daná. Přímka BQ má býti normálou křivky v bodě B.

Volme přímku p za osu pravoúhlé soustavy k p. za osu Y; (obr. 1,) kolmici s bodu A na osu Y za osu x, jich průsečík budiž O. Souřadnice bodu A nechť jsou (a, o), bodu B (x, y), pořadnice bodu M budiž l.

Jest tedy:

$$OM = l, \qquad MP = t, \qquad MQ = f(t)$$

$$OQ = y + \frac{x}{y'}, \qquad OP = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2y},$$

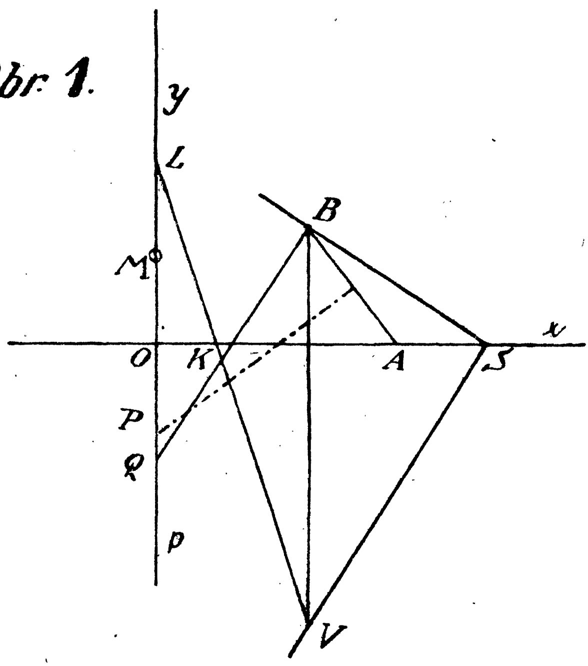
značí-li obvykle $y' = \frac{dy}{dx}$.

Poněvadž jest

$$MP = MO + OP = -l + \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2y},$$

$$MQ = MO + OQ = -l + \frac{x}{y'} + y,$$

Obr. 1.



dospíváme k rovnicím:

$$\begin{aligned} y + \frac{x}{y'} - l &= f(t) \\ t &= -l + \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2y} \end{aligned} \qquad (1)$$

Rovnici první této soustavy pišme ve tvaru:

$$y\,dy + x\,dx - l\,dy = f(t)\,dy$$

a druhou znásobíce $2y$ differencujme, čímž obdržíme:

$$y\,dt + t\,dy = x\,dx + y\,dy - l\,dy.$$

Srovnáním těchto dvou rovnic plyne:

$$y \frac{dt}{dy} + t = f(t),$$

čili:

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dy}{y}, \tag{1}$$

t. j.

$$y = c e^{\int \frac{dt}{f(t) - t}},$$

značí-li c integrační konstantu.

Rovnice hledané křivky tedy zní:

$$\begin{aligned} y &= c e^{\int \frac{dt}{f(t) - t}} \\ 2yt &= x^2 + y^2 - 2ly - a^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Jest třeba dodati ještě jistou poznámku.

Ve výrazu hořejším

$$OP = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2y},$$

est a jakožto úseč ka bodu $A(a, o)$ reálná. Možno však ve výraze tom považovati a za imaginární a klásti $a = ib$, takže výraz pro OP nabývá tvaru:

$$OP = \frac{x^2 + y^2 + b^2}{2y}.$$

Interpretace geometrická jest v tomto případě jednoduchá. Bod P jest vlastně střed kružnice, která prochází body $A(a, o)$ a $A_1(-a, o)$ a bodem B. Jsou-li body A a A_1 imaginární konjugované o souřadnicích $(-bi, o)$ a (bi, o), pak kruh jdoucí těmito body a bodem B jest reálný. Jeho střed na ose Y sestrojíme jakožto střed kružnice, která kružnici sestrojenou nad průměrem, jehož koncové body $\overline{A}$ a $\overline{A}_1$ mají souřadnice (b, o) a $(-b, o)$ pravoúhle protíná a prochází bodem B. Ostatně nepřihlížíme-li k tomuto geometrickému významu úsečky OP možno snadno veličinu $\frac{y}{2} + \frac{x^2 + b^2}{2}$ sestrojiti a tak bod P určiti.

Dříve než k rozboru křivek rovnicí (2) stanovených přistoupíme, ukažme, jak možno stanoviti i příslušný střed zakřivení v bodě B; učiníme to způsobem podobným jak jsem naznačil v článku svém: Strojení středu křivosti methodou analyticko-deskriptivní v tomto časopise, ročník 45, s tím rozdílem, že za jednu řídící přímku dotyčného paraboloidu budeme považovati přímku, jejíž ortogonální průmět jest tečna křivky. Dvě nekonečně blízké normály dané křivky považujeme za průměty povrchových přímek paraboloidu, jehož řídící rovina jest rovina XY. Za dvě řídící přímky druhého systému považujeme jednak přímku, jejíž ortogonální průmět jest tečna a druhá má svůj ortogonálný průmět splývající s osou Y.

Podobným způsobem jako jsme to v citovaném pojednání učinili, určíme, že ordináta Y_0 stopy řídící přímky, jejíž průmět stotožňuje se s osou Y, jest dána rovnicí:

$$Y_0 = v - (x - x_0)\frac{dv}{dx},$$

značí-li v úsek OQ normály na ose Y, x_0 úsečku stopníků druhé přímky řídící, jejíž průmět spadá v tečnu křivky vedenou v bodě o úsečce x. Vhodnou volbou veličiny x_0, zjednáme si výraz pro Y_0, jejž snadno sestrojíme.

Volme za úsečku x_0 úsečku průsečíku tečny bodu B s osou X; ta dána jest rovnicí:

$$x_0 - x = -\frac{y}{y'} = -y\frac{dx}{dy};$$

poněvadž $v = y + \frac{x}{y'}$, obdržíme z rovnice první soustavy (1)

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = f'(t)\frac{dt}{dx}$$

a proto: $Y_0 = v - y\frac{dx}{dy}\frac{dt}{dx}f'(t) = v - y\frac{dt}{dy}f'(t).$

Dle rovnice (1)' jest však $y\frac{dt}{dy} = f(t) - t,$

a proto $$Y_0 = v - (f(t) - t)f'(t) \qquad (\alpha)$$

kterýžto výraz možno též psáti ve tvaru:

$$Y_0 = v - PQf'(t) = OQ - PQf'(t) \qquad (\alpha),$$

Nahradíme-li nyní řídící přímku paraboloidu, jejíž průmět spadl v tečnu, přímkou, jejíž průmět jest rovnoběžný s osou Y' pak oba průměty řídících přímek jsou spolu rovnoběžny a tím dospíváme k této jednoduché konstrukci středu křivosti: Tečna

v bodě B protne osu x v bodě S; bodem tím vedeme rovnoběžku s normálou, jež protne bodem B vedenou rovnoběžku s osou Y v bodě V. Stanovíme-li nyní na ose Y bod L tak, že

$$OL = Y_0 = OQ - PQf'(t) \qquad (\alpha)''$$

pak spojnice LV protne normálu BQ v bodě K, jenž jest středem křivosti. Strojení středu křivosti jest tedy převedeno na strojení tečny křivky, jež v pravoúhlé soustavě (u, t) má rovnici: $u = f(t)$.

Po těchto obecných úvahách, položme si za úlohu vyšetřiti křivky, pro které $f(t)$ má tvar lineární:

$$f(t) = kt,$$

t. j. křivky, pro něž platí:

$$MQ = kMP,$$

kdež k libovolnou reální konstantu značí.

Tu $$e^{\int \frac{dt}{f(t) - t}} = e^{\int \frac{dt}{(k-1)t}} = e^{\frac{1}{k-1} \log t} = \sqrt[k-1]{t},$$

a proto: $$y = c\sqrt[k-1]{t},$$

čili: $$t = \left(\frac{y}{c}\right)^{k-1}.$$

Rovnice příslušných křivek dle (2) nabývá tvaru:

$$\left(\frac{y}{c}\right)^{k-1} = \frac{x^2 + y^2 - a^2 - 2ly}{2y},$$

aneb píšeme-li místo $\frac{2}{c^{K-1}}$ zkrátka c,

$$cy^k = x^2 + y^2 - a^2 - 2ly. \qquad (3)$$

Z rovnice této patrno, že křivka prochází bodem $A(a, o)$ a bodem k němu souměrným $A_1(-a, o)$ hledíc k ose Y.

Pro strojení středu křivosti rovnice $(\alpha)''$ přechází v rovnici:

$$Y_0 = OL = OQ - kPQ,$$

jíž možno dáti tvar:

$$(\beta) \quad OL = OQ - (k-1)MQ = (2-k)OQ + (k-1)OM.$$

čímž jednoduše stanovena poloha bodu L pro konstrukci středu křivosti žádoucí.

Položme v rovnici (3) $k = 2$; pak dostáváme křivky:

$$y^2(-C+1) + x^2 - 2ly - a^2 = 0.$$

Rovnice tato značí při proměnném C svazek kuželoseček, který prochází body $A(a, o)$, $A_1(-a, o)$ a poněvadž do svazku toho patří kružnice

$$x^2 + y^2 - 2ly - a^2 = 0,$$

a dvojná přímka

$$y^2 = 0,$$

jest to svazek kuželoseček, jež v bodech A a A_1 dotýká se společných tečen. Kolmice vztýčené na společné tečny v bodech dotyčných A a A_1 protínají se na ose Y v bodě M_1 takže

$$OM_1 = l = OM$$

t. j. bod M_1 stotožňuje se s bodem M.

Tím tedy dospějeme ke konstrukci normály kuželosečky v libovolném bodě jejím B dána-li tato mimo bod polohou osy reálné a tečnou s bodem dotyčným A. Stanovíme osu úsečky AB, která protne osu kuželosečky v bodě P; normála v bodě A pak protne tutéž osu v bodě M. Učiníme-li $MQ = 2MP$, tu jest BQ normálou.

Větu tuto lze též takto vysloviti: Normály ve dvou libovolných bodech kuželosečky vedené protnou osu ve dvou bodech a středem úsečky těchto dvou bodů prochází symetrála úsečky spojující ony dva body kuželosečky.

Pro střed křivosti určíme z rovnice (β)

$$Y_0 = OL = OM \text{ t. j. } M \equiv L.$$

Z toho plyne konstrukce středu křivosti kuželosečky dané hořejšími podmínkami. Tečna v bodu B vedená protne spojnici AA_1 (bod A_1 souměrný s bodem A hledíc k ose) v bodě S; učiníme-li $SV \parallel BQ$ a $BV \parallel OM$ tu přímka MV protne normálu BQ ve středu křivosti K.

Pro ten případ, že bod A jest vrcholem na druhé ose kuželosečky, stotožňuje se bod M se středem kuželosečky a tak dospíváme ku známé konstrukci středu křivosti kuželosečky, dána-li tato osami.

Položme v rovnici (3),

$$k = 3.$$

Pak obdržíme křivky 3ho stupně, jichž rovnice zní:

$$cy^3 - x^2 - y^2 + 2ly + a^2 = 0, \tag{4}$$

aneb

$$x^2 = cy^3 - y^2 + 2ly + a^2.$$

Jest známo, že promítnutím libovolnou čáru stupně třetího lze převésti vždy na tvar:

$$y^2 = cx^3 + Ax^2 + Bx + D,$$

čili vyměníme-li osy X a Y, na tvar:

$$x^2 = cy^3 + Ay^2 + By + D. \tag{4'}$$

I lze nyní ukázati, že posunutím počátku O ve směru osy Y do určitého bodu O_1, lze každou čáru (4)′ převésti ve tvar (4).

Položme:

$$y = \eta + \beta.$$

Pak rovnice (4)′ převede se na tvar (4):

$$x^2 = c\eta^3 - \eta^2 + 2l\eta + a^2$$

platí-li:

$$3c\beta + A = -1$$
$$3c\beta^2 + 2A\beta + B = 2l$$
$$c\beta^3 + A\beta^2 + B\beta + D = a^2.$$

Z rovnice první této soustavy poněvadž c od nully se různí stanovíme

$$\beta = -\frac{1 + A}{3c},$$

z rovnice druhé určíme l a z třetí a, kterážto veličina jest patrně úsečkou průsečíku přímky $y = \beta$ s křivkou (4)′.

Tím dospěli jsme k jednoduché konstrukci normál a středu křivosti křivek 3ho stupně uvedených kollineací centrálnou na obecný tvar:

$$x^2 = cy^3 + Ay^2 + By + D.$$

Je-li vésti normálu v bodě B křivky pak (obr. 2) stanovíme na ose Y bod

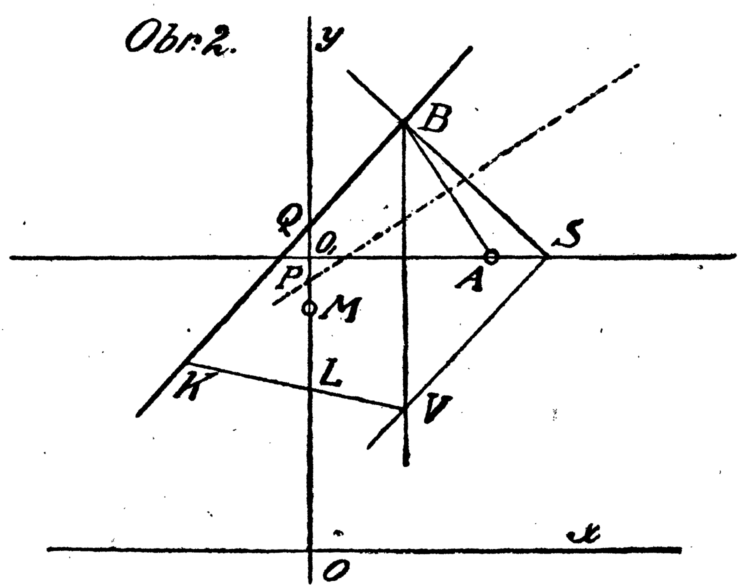
O_1 dle podmínky: $OO_1 = \beta = -\dfrac{1+A}{3c}$ a bod M dle podmínky

$$O_1M = l = \frac{3c\beta^2 + 2A\beta + B}{2}.$$

Bodem O_1 vedeme rovnoběžku s osou x, jež protne křivku v bodech dvou; jsou-li imaginární, řídíme se poznámkou shora uvedenou. Označme jeden z nich A: symetrála úsečky AB protne osu Y v bodě P a učiníme-li na ose Y, $MQ = 3\,MP$, pak přímka BQ jest normálou. Je-li v jiném bodě vésti normálu, pak posice pevných bodu A a M jsou již stanoveny a lze tudíž další normály strojiti jednoduše.

Je-li stanoviti střed křivosti v bodě B, pak použitím rovnice (β) uvážíme-li, že stanovena byla pro bod O_1, obdržíme:

$$O_1 L = - O_1 Q + 2\,O_1 M = QM + O_1 M,$$



a tedy: $$OL = QM + OM,$$
čili: $$QL = 2\,QM,$$
t. j. bod L jest souměrným s bodem Q dle středu souměrnosti M.

Střed křivosti sestrojí se tedy takto:

Tečna v bodě B protne $O_1 A$ v bodě S. Učiníme-li $SV \parallel BQ$ a $BV \parallel OO_1$, pak VL protne normálu ve středu křivosti K.

Položíme-li v rovnici (3) $a = o$, $l = o$, a klademe-li $k = 3$, dospíváme ku křivce:

$$cy^3 = x^2 + y^2,$$

již možno značí-li b libovolnou konstantu psáti ve tvaru:

$$y^3 = b(x^2 + y^2), \tag{5}_I$$

která značí kubickou dupplikatrix;

Je-li $k = \frac{4}{3}$, dospíváme ku křivce:

$$(x^2 + y^2)^3 = r^2 y^4, \tag{5}_{II}$$

která značí křivku zvanou dvojvejčitou.

Položíme-li $k = \frac{3}{2}$. obdržíme křivku:

$$4 b y^3 = (x^2 + y^2)^2, \tag{5}_{III}$$

která značí rovnici jednolistu.

Je-li $k = 4$, objeví se rovnice kampyly:

$$y^4 = b^2 (x^2 + y^2) \tag{5}_{IV}$$

Položíme-li v rovnici (3) $k = \frac{m}{n}$ aneb $k = -\frac{m}{n}$ kdež m a n čísla kladná celistvá značí, obdržíme typy křivek:

$$c\, y^m = (x^2 + y^2 - a^2 - 2\, l\, y)^n$$
$$c = (x^2 + y^2 - a^2 - 2\, l\, y)^n\, y^m,$$

které přechází pro $a = o$, $l = o$ v křivky, jichž rovnice jsou:

$$c\, y^m = (x^2 + y^2)^n$$
$$c = (x^2 + y^2)^n\, y^m,$$

jichž zvláštní případy jsou křivky pod (5) uvedené.

Poslední dvě rovnice jsou zahrnuty v obecném tvaru:

$$y^n = c\,(x^2 + y^2)^\varrho, \tag{6}$$

v nichž n a ϱ značí čísla ať kladná neb záporná.

Položíme-li v rovnici (6)

$$n = m - 1,$$
$$c = b^m,$$
$$\varrho = \tfrac{1}{2},$$

pak z ní plyne rovnice:

$$y^{m-1} = b^m \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{6}'$$

Křivky tyto zove Clairaut „Courbes des médianes paraboliques ét hyperboliques“; k jich diskussi nabádá Loria ve své knize „Algebraische Curven“ str. 323, podotýkaje, že doposud žádná obecná vlastnost jejich známa není mimo tu, že užívá se jich k řešení rozšířeného problemu delického.

Ke křivkám (6), tedy i k (6)' stanoví se dle předchozího prajednoduše normála a střed křivosti.

Tu $k = \frac{n}{\varrho}$ a bod M stotožňuje se s počátkem O, jakož i bod A.

Je-li v bodě B vésti normálu, pak stanovíme symetrálu úsečky $O B$, která protne osu Y v bodě P; je-li Q bod na ose Y tak určený, že

$$O Q = \frac{n}{\varrho} O P,$$

pak přímkou $B Q$ jest normálou.

Střed křivosti určí se takto: Na ose Y určíme bod L dle rovnice (β)

$$O L = \left(2 - \frac{n}{\varrho}\right) O Q.$$

Protne-li tečna v B osu X v bodě S a učiníme-li $S V \parallel B Q$ a $B V \parallel O P$ pak $V L$ protne normálu $B Q$ ve středu křivosti K.

Sur les courbes dont les normales satisfont à une certaine condition.

Par A. Pleskot.

(Résumé de l'article précédent.)

Dans cet article on détermine les courbes dont les normales vérifient la loi suivante: Dans un plan, on donne une droite p, un point M sur p et un point A non situé sur p. La normale à un point arbitraire B de la courbe est définie comme il suit: L'axe du segment AB coupe la droite p en un point P; désignons le segment MP par t et déterminons un point Q sur p de telle manière que $MQ = f(t)$ où $f(t)$, représente une fonction arbitraire; cela posé, la droite BQ est la normale cherchée.

Si nous prenons la droite donnée pour l'axe des y et la perpendiculaire abaissée d'un point A sur l'axe des x et si O est l'origine des coordonnées, $OM = l$ et $OA = a$, l'équation des courbes cherchées s'ecrit

$$y = Ce^{\int \frac{dt}{f(t) - t}}, \quad 2yt = x^2 + y^2 - 2ly - a^2,$$

où C représente une constante arbitraire.

On donne aussi pour ces courbes, la construction du centre de courbure. En particulier, on étudie les courbes pour les quel-

les $f(t) = kt$ ou $MQ = k \,.\, MP$, k étant une constante arbitraire. L'équation de ces courbes s'écrit

$$cy^k = x^2 + y^2 - a^2 - 2ly.$$

Les coniques appartiennent à ce type de courbes pour $k = 2$; quelques constructions simples des normales et des centres de courbure pour les coniques y sont développées.

Pour $k = 3$ on est conduit aux courbes

$$x^2 = cy^3 - y^2 + 2ly + a^2.$$

Ensuite d'autres courbes connues sont mentionnées que l'on obtient en substituant des différentes valeurs au lieu de k dans l'équation donnée ci-dessus, et en particulier les courbes dont l'équation s'écrit

$$y^n = c\,(x^2 + y^2)^\varrho$$

et qui ont été considérées par Clairaut.

Theorie dopružování.

Napsal dr. Frant. Nachtikal v Brně.

1. *Úvod. Definice ryzího dopružování.* V pružném tělese vznikají současně s deformacemi vnitřní síly, jež jsou těmito deformacemi jednoznačně určeny; udržujeme-li určitý stav deformací stálým, jsou také tyto vnitřní síly stálými. Jsou-li ještě vnitřní síly úměrny deformacím, jest těleso dokonale pružné. Tělesa dokonale pružná jsou ovšem pouze abstrakcí. Skutečná tělesa jeví odchylky někdy větší, jindy menší. Mezi tyto odchylky patří zjev zvaný dopružováním. Dopružování definujeme obecně jako vlastnost těles, v nichž okamžité vnitřní síly závisí netoliko na nynějších deformacích, nýbrž i na dřívějších deformacích. V určitě deformovaném tělese mohou býti různé vnitřní síly, jež se časem mění. Po dosti dlouhé době, udržujeme-li deformaci takovýchto těles stálou, nastane jistý konečný stav vnitřních sil, jenž se pak s dobou již nemění. Tento stav nazývá Wiechert[1]) *katastatickým*, snad vhodnější bylo by nazvati tento stav *normálním*, neboť v tomto stavu pominul již účinek dřívějších deformací a vnitřní síly jsou určeny pouze rozdělením deformací jako v pružném tělese (nenastaly-li trvalé deformace).

[1]) E. Wiechert, Wied. Ann. *50*. 336. 1893.