Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Klobouček

O zborcených plochách, které mají danou asymptotickou plochu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 2-3, 97--109

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121362

pons $f(\alpha)$ en série de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$. Le rayon de courbure R sera donné par la formule

$$R = f(\alpha) + f''(\alpha) = a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}(1 - n^2)(a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha).$$

Supposons que R garde partout le même signe (sauf certains points où R peut être nul ou infini); dans ce la cas courbe est convexe et sa longueur totale est égale à $2\pi a_0$.

La série de Fourier donne immédiatement la démonstration du théorème suivant découvert par Kneser: la courbure d'une courbe convexe fermée a au moins deux maxima et deux minima. Car il résulte des propriétés connues des expressions trigonométriques que la série de Fourier qui exprime $\frac{dR}{d\alpha}$ s'annule au moins quatre fois dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

En employant la variable α on démontre aisément, pour les surfaces de révolution convexes fermées, les équations de Minkovski (1) et (2).

O zborcených plochách, které mají danou asymptotickou plochu.

Napsal Dr. Jos. Klobouček.

U přímkových ploch, daných křivkou Σ na rozvinutelné ploše S a jistým dalším útvarem řídícím, při čemž povrchové přímky zborcené plochy jsou tečnami plochy S v bodech křivky Σ, jest, jak známo, čára úvratu rozvinutelné plochy geometrickým místem pólů jednotlivých oskulačních rovin křivky Σ vzhledem k jednotlivým oskulačním hyperboloidům přímkové plochy.*)

Je-li křivka Σ rovinná, splývají všecky její oskulační roviny v jedinou a čára úvratu dané rozvinutelné plochy jest geometrickým místem pólů této roviny vzhledem ke všem oskulačním hyperboloidům řečené plochy.

*) J. Sobotka: Zur Konstruktion von Oskulationshyperboloide an windschiefen Flächen. Prag. Berichte 1903.

Položivše křivku Σ do roviny nekonečně vzdálené můžeme, jak patrno, vytvořiti přímkové plochy, které mají předem danou asymptotickou rozvinutelnou plochu; její čára úvratu jest potom geometrickým místem středů všech oskulačních hyperboloidů.

Chci v následujícím poukázati v krátkosti k těmto zborceným plochám; jakožto druhý řídící útvar volme nejprve, jakožto případ konstruktivně nejpřístupnější, prostorovou křivku.

Zborcená plocha budiž tedy dána asymptotickou rozvinutelnou plochou S a mimo ni ležící prostorovou křivkou Σ_1.

Jednotlivé povrchové přímky zborcené plochy obdržíme, vedeme-li jednotlivými body A_1, v nichž tečné roviny α plochy S protínají křivku Σ_1, přímky rovnoběžné s dotyčnými přímkami rovin α s plochou S, tedy rovnoběžky s příslušnými tečnami čáry úvratu asymptotické plochy.

Rozvinutelná plocha S jest skutečně asymptotickou plochou takto vytvořené zborcené plochy, neboť libovolná rovina α jest tečnou rovinou této plochy obsahujíc příslušnou povrchovou přímku a její dotyčný bod jest průsečník této přímky s přímkou, podél které se rovina α dotýká plochy S.

Jest patrno, že libovolným bodem A_1 křivky Σ_1 prochází tolik povrchových přímek, kolik probíhá tímto bodem tečných rovin α plochy S, a v libovolné rovině α jest položeno tolik rovnoběžných přímek zborcené plochy, v kolika bodech seče tato rovina křivku Σ_1.

Budiž $\mathbf{n}_1$ stupeň křivky Σ_1, $\mathbf{m}$ třída plochy S a $\mathbf{n}$ stupeň její řídící plochy kuželové; křivka Σ_1 jest tedy $\mathbf{m}$ násobnou a nekonečně vzdálená křivka Σ plochy S jest $\mathbf{n}_1$ násobnou křivkou zborcené plochy.

Mezi body křivek Σ_1, Σ vzniká souvislost $[m, n_1]$ a spojením korespondujících bodů vznikne obecně plocha stupně $(m + n) n_1$, neboť na každém svazku rovin, jehož osa má k daným útvarům obecnou polohu, vyvolávají řady bodové na křivkách Σ_1, Σ souvislost $[m\, n_1, n\, n_1]$, jichž koincidence stanoví roviny obsahující povrchovou přímku zborcené plochy.

Poukáži nyní k jednoduché konstrukci oskulačního hyperboloidu podél libovolné povrchové přímky.

Jmenujme přímku tuto **a**; prochází bodem A_1 křivky Σ_1, jest položena v tečné rovině α asymptotické plochy a současně rovnoběžná s její dotyčnou přímkou **h**; bod, ve kterém se dotýká přímka **h** čáry úvratu asymptotické plochy, jmenujme S. Hyperboloid oskulační obsahuje mimo přímku **a** ještě přímku **p**, která jest souměrně položena k přímce **a** dle přímky **h** a bude protínati oskulační rovinu ω_1 křivky Σ_1 vedenon v bodě A_1 v kuželosečce $\mathbf{u}_s$, která oskuluje čáru Σ_1 v tomto bodě. Současně protne asymptotický kužel oskulačního hyperboloidu tuto rovinu v kuželosečce **u**, která jest soustředná, podobná a podobně položená s křivkou $\mathbf{u}_1$ a oskuluje stopu asymptotické rozvinutelné plochy na rovině ω_1 v bodě H, v němž tuto rovinu seče přímka **h**.

Přímka $A_1 S$ jest průměrem hyperboloidu a rovina vedená přímkou **h**, rovnoběžně s tečnou rovinou plochy v bodě A_1 jest příslušnou rovinou diametrální. Stopa **r** této roviny na rovině ω_1 jest tedy přímka rovnoběžná s tečnou $\mathbf{t}_1$ čáry Σ_1 v bodě A_1 a prochází bodem H.

Pro kuželosečku **u** jest bod A_1 a přímka **r** pólem a jemu příslušnou polárou; kuželosečka $\mathbf{u}_1$ prochází průsečíkem P přímky **p** s rovinou ω_1.

Kuželosečky **u**, $\mathbf{u}_1$ lze skutečně sestrojiti.

Pomocí Steinerovy paraboly příslušné oskulujícímu bodu H, bodu A_1 a přímce **r** jakožto pólu a příslušné poláře, najdeme průměr **o** kuželosečky **u**. Průměr tento jeví se jakožto spojnice bodu H s průsečíkem kolmice vedené se středu křivosti C, normály **n** v bodě H k hlavní normále $\mathbf{n}_1$ křivky Σ_1 v bodě A_1 s kolmicí k přímce **n** v jejím průsečíku s přímkon $\mathbf{n}_1$. Tato Steinerova parabola určena jest přímkou $A_1 H$, normálou **n** se středem křivosti C a hlavní normálou $\mathbf{n}_1$; průměr **o** kuželoseček **u**, $\mathbf{u}_1$ jest patrně řídící přímkou této paraboly.

Jak patrno protíná se nyní tečna křivky $\mathbf{u}_1$, vedená v bodě P s tečnou $\mathbf{t}_1$ v bodě A_1 na průměru **o** v bodě G, neboť $\overline{A_1H} = \overline{HP}$, a bod G jest pólem přímky $A P$ pro kuželosečku $\mathbf{u}_1$. Zcela obdobnou konstrukcí nalezneme nyní průměr $\mathbf{o}_1$ křivky $\mathbf{u}_1$; průměr ten jest spojnicí bodu A_1 s průsečíkem přímky vedené středem křivosti C_1 normály $\mathbf{n}_1$ rovnoběžně s $A_1 P$ s kolmicí k přímce $\mathbf{n}_1$ v jejím průsečíku s přímkou **k** vedenou bodem G kolmo k $A_1 P$, Průměry **o**, $\mathbf{o}_1$ dávají společný střed O křivek **u**, $\mathbf{u}_1$. Nyní nalezneme snadno druhý průsečík Q přímky **r** s křivkou **u**, neboť úsečka $H Q$ jest půlena průměrem $\mathbf{o}_1$; tečna v bodě Q probíhá bodem A_1. Délku sdruženého průměru k průměru $O A_1$ v kuželosečce $\mathbf{u}_1$ nalezneme pomocí involuce konjugovaných bodů, neboť průměr tento jest rovnoběžný s tečnou $\mathbf{t}_1$ v bodě A_1 a polárou jeho průsečíku M s přímkou $A_1 P$ jest přímka procházející bodem G rovnoběžně s průměrem $\mathbf{o}_1$. Podobně bychom mohli učiniti při vyhledání průměru sdruženého k průměru OH v kuželosečce $\mathbf{u}$.

Zvláštní případ konstrukce nastává, je-li křivka Σ_1 přímkou; vezměme nejprve v úvahu případ obecný, kdy jest zborcená plocha dána jistou rozvinutelnou plochou S, na ní křivkou Σ, jakožto dvěma soumeznými čarami a pak přímkou $\mathbf{q}$.

Povrchová přímka $\mathbf{a}$ procházející bodem A křivky Σ nachází se opět v tečné rovině α rozvinutelné plochy sestrojené v bodě A a protíná přímku $\mathbf{q}$ v bodě A_1. Oskulační hyperboloid podél přímky $\mathbf{a}$ obsahuje také přímku $\mathbf{p}$, jdoucí bodem A a ležící v tečné rovině α, sestrojenou dle theoremu* *Dupinova* pomocí tečny $\mathbf{t}$ křivky Σ v bodě A a bodu S čáry úvratu rozvinutelné plochy, který přísluší rovině α. Mimo to obsahuje danou přímku $\mathbf{q}$ a přímku $\mathbf{b}$, která se s $\mathbf{q}$ protíná v bodě B na oskulační rovině ω čáry Σ sestrojené v bodě A a která seče také přímku $\mathbf{p}$ v bodě A'_1 na spojnici SA_1.

Stopa $\mathbf{u}$ oskulačního hyperboloidu na rovině ω bude tedy oskulovati křivku Σ v bodě A a v bodě B se bude dotýkati stopy roviny přímek $\mathbf{b}$, $\mathbf{q}$. Stopa tato protíná se s tečnou $\mathbf{t}$, jakožto stopou roviny přímek $\mathbf{a}$, $\mathbf{p}$ v bodě T, takže body A_1, A'_1, S, T jsou harmonické. Kuželosečka $\mathbf{u}$ jest dle toho jednoznačně určena; za příčinou konstrukce dalších přímek oskulačního hyperboloidu netřeba ji ani sestrojovati. Chceme-li sestrojiti na př. povrchovou přímku $\mathbf{x}$, která prochází bodem X přímky $\mathbf{a}$, protněme přímku $S X$ s tečnou $\mathbf{t}$ v bodě R a určeme poláru $\mathbf{r}$ tohoto bodu vzhledem ke křivce $\mathbf{u}$; poláru tuto můžeme aplikací Brianchonovy věty na Steinerovu parabolu příslušnou oskulujícímu bodu A snadno nalézti a vyhledejme hned také její průsečík L s přímkou $B T$. Protněme nyní přímku $A_1 L$ s přímkou $\mathbf{b}$ v bodě Y, který s bodem X poskytuje hledanou povrchovou přímku $\mathbf{x}$. Přímka $\mathbf{x}$ protne přímku $\mathbf{r}$, to jest stopu tečné roviny oskulačního hyperboloidu na rovině ω v bodě C, který leží patrně na křivce **u**, takže přímka $R\,C$ jest současně tečnou této křivky v bodě C.

Skutečně jest bod L pólem přímky $B\,R$ vzhledem ke křivce **u** a pólem roviny $S\,B\,R$ vzhledem k hyperboloidu; bod C křivky **u** jest s bodem A harmonicky oddělen bodem L a průsečíkem E přímky $B\,R$ s **r** čili $A\,L$. Týž bod však vytne přímka $X\,Y$ na **r**, neboť jest s přímkou $X\,A_1$ konjugovaná k pólu L a polární rovině $S\,B\,R$.

Zcela obdobně bychom určovali povrchové přímky jdoucí jednotlivými body přímky **p**; je-li D průsečík přímky $S\,R$ s přímkou **p**, a Q průsečík přímky $A'_1\,L$ s přímkou **q**, jest přímka $D\,Q$ druhá povrchová přímka oskulačního hyperboloidu jdoucí bodem C. Stopa tečné roviny v bodě D jest totožna se stopou **r** tečné roviny v bodě X.

Je-li nyní zborcená plocha dána rozvinutelnou asymptotickou plochou a přímkou **q**, jest konstrukce oskulačního hyperboloidu tato: Oskulační hyperboloid obsahuje opět mimo přímky **a**, **q** ještě přímky **p**, **b** symetricky položené dle středu S tohoto oskulačního hyperboloidu; bod S jest bodem čáry úvratu asymptotické plochy položený v rovině přímek **a**, **p**, které jsou rovnoběžny s tečnou **h** této čáry úvratu v bodě S. Spojnice **d** průsečíků A_1, A'_1 přímek **a**, **q**, resp. **p**, **b**, probíhá bodem S, takže $A_1\,S = S\,A'_1$ a jest současně sdruženým průměrem oskulačního hyperboloidu vzhledem k rovině jdoucí středem S rovnoběžně s rovinou přímek **a**, **q**, resp. **b**, **p**. Tato rovina seče asymptotický kužel hyperboloidu mimo přímku **h**, ještě v přímce **l**, rovnoběžné s přímkami **b**, resp. **q**. Asymptotický kužel oskulačního hyperboloidu jest tedy stanoven jakožto kužel druhého stupně o vrcholu S, oskulující asymptotickou rozvinutelnou plochu podél hrany **h** a dotýkající se roviny přímek **l**, **d** podél přímky **l**; jeho stopu na libovolné rovině bychom dle předešlých poznámek snadno nalezli.

Budiž nyní zborcená plocha dána asymptotickou rozvinutelnou plochou S a další řídící plochou rozvinutelnou S_1, jednotlivé povrchové přímky obdržíme, vedeme-li v tečných rovinách α, plochy S, tečny plochy S_1, rovnoběžné s dotyčnými přímkami rovin α.

Jsou-li m, n, resp. m_1, n_1, třídy ploch S, resp. S_1, a stupně jejich řídících ploch, jest stupeň vytvořené zborcené plochy

$(m + n)\, m_1$, neboť libovolná nekonečně vzdálená přímka protíná $n\, m_1$ přímek v konečnu položených a mimo to $m\, m_1$ přímek nekonečně vzdálených.

Stanovme oskulační hyperboloid podél jedné přímky **a** určené hořejším způsobem. Oskulační hyperboloid obsahuje mimo to ještě přímku **p**, rovnoběžnou s **a** a symetrickou dle středu S, v němž se rovina α těchto přímek dotýká čáry úvratu asymptotické plochy a kterým prochází přímka **h** této plochy s těmito přímkami také rovnoběžná. Rovina tečná α_1 plochy S_1, obsahující přímku **a**, dotkne se čáry úvratu v bodě S_1 a příslušná povrchová přímka plochy S_1 jdoucí tímto bodem vytne na přímce **a** její dotyčný bod A_1 s plochou S_1, který jest současně dotyčným bodem roviny α_1 s oskulačním hyperboloidem. Jest patrno, že rovina β vedená středem S rovnoběžně s rovinou α_1 obsahuje přímku **h** a jest konjugovaná k průměru $S A_1$ vzhledem k asymptotickému kuželi σ oskulačního hyperboloidu. Poněvadž tento kužel σ oskuluje mimo to asymptotickou plochu S podél hrany **h**, můžeme jednoduchým obratem sestrojiti také jeho konjugovaný průměr **g** k rovině S_1 **h**. Kužel σ_1 opsaný oskulačnímu hyperboloidu s bodu S_1 bude se ho dotýkati tedy v jisté kuželosečce $\mathbf{u}_1$, jejíž rovina bude procházeti bodem A_1 a bude rovnoběžná s průměrem **g**; křivka $\mathbf{u}_1$ bude tedy obsahovati bod A'_1 na přímce **p** v průsečíku s přímkou **g**$'$ vedenou rovnoběžně s **g** bodem A_1, neboť průměr **g** jest položen v rovině přímek **a**, **p**. Dotyčná přímka kužele σ_1 s rovinou S_1 **p** jest tedy přímka $S_1 A'_1$ a mimo to oskuluje tento kužel plochu S_1 podél hrany $S_1 A_1$. Tím jest kužel σ_1 úplně stanoven; jeho dvě tečné roviny vedené $S S_1$ jsou též tečnými rovinami kužele σ.

Konstrukci můžeme provésti tak, že stanovíme stopy **u**, $\mathbf{u}_2$ kuželů σ, σ_1 na libovolné rovině ϱ, mající k daným útvarům obecnou polohu.

Kuželosečka **u** oskuluje stopu plochy S v bodě A, v němž přímka **h** seče rovinu ϱ a má ve stopě **b** roviny β jdoucí bodem A a v bodě B, v němž přímka $S A_1$ protíná rovinu ϱ, poláru a jí přidružený pól; Steinerovou parabolou bodu A získáme opět pól L stopy **l** roviny $S_1 h$. Přímka $S L$ jest dříve označený průměr **g**

Pomocí přímky $\mathfrak{g}'$ vedené rovnoběžně s $\mathfrak{g}$ bodem A_1 obdržíme na přímce $\mathfrak{p}$ bod A'_1. Tyto body promítněme nyní s bodu S_1 na rovinu ϱ. Bod A_1 promítá se do bodu A_2 na stopu roviny tečné α_1 a v něm oskuluje se kuželosečka $\mathfrak{u}_2$ se stopou rozvinutelné plochy S_1; bod A'_1 promítá se na stopu roviny $S_1\,\mathfrak{p}$ do bodu A'_2; této stopy se v tomto bodě dotýká také kuželosečka $\mathfrak{u}_2$ a lze ji tedy také snadno sestrojiti.

Určeme nyní průsečík M přímky $S\,S_1$ s rovinou ϱ, který, jak patrno, jest položen na přímce $\mathfrak{l}$ a sestrojme jemu konjugovaný bod E na této přímce pomocí involuce konjugovaných bodů. Jedním párem této involuce jsou průsečíky G, N přímky $\mathfrak{l}$ s přímkou $A_2\,A'_2$ a se stopami rovin α_1, resp. $S_1\,\mathfrak{p}$, které se obě protínají na přímce $\mathfrak{l}$ v bodě N; centrální bod obdržíme na spojnici středu O_2 křivky $\mathfrak{u}_2$ s pólem L'' přímky $\mathfrak{l}$. Bod L'' jest v průsečíku roviny ϱ a přímky $\mathfrak{g}''$ vedené bodem S_1 rovnoběžně k přímce $\mathfrak{g}$ a zapadá do přímky vedené bodem N rovnoběžně se stopou roviny α, v níž leží body A, B, L.

Použitím úplného čtyřrohu nalezneme nyní k bodu M konjugovaný bod E. Při sestrojení středu O_2 můžeme použíti opět Steinerovy paraboly pro bod A_2, při čemž současně jest bod N pólem přímky $A_2\,A'_2$.

Spojíme-li dále bod E s bodem L'', obdržímu poláru $\mathfrak{m}_2$ bodu M ke kuželosečce $\mathfrak{u}_2$, a s rovinou $S_1\,\mathfrak{m}_2$ jest rovnoběžna rovina křivky $\mathfrak{u}_1$, podél níž se kužel σ_1 dotýká oskulačního hyperboloidu. Stopa roviny $S_1\,\mathfrak{m}_2$ na rovině ϱ jest přímka $\mathfrak{m}_1$, rovnoběžná s přímkou $\mathfrak{m}_2$ a procházející průsečíkem L' přímek $\mathfrak{g}'$ a $A\,L$.

Označíme-li průsečík přímky $\mathfrak{m}_1$ s přímkou $\mathfrak{l}$ H, a průsečík přímky $\mathfrak{h}$ s $\mathfrak{g}'$ F, jest průsečík O_1 přímek $S\,S_1$ a $H\,F$ středem kuželosečky $\mathfrak{u}_1$. Kuželosečku tuto lze pak již zcela snadno sestrojiti, neboť tečny její v bodech A_1, A_1' procházejí průsečíkem V přímky $H\,F$ s přímkou $S_1\,N$, která jest také rovnoběžná s přímkou $\mathfrak{h}$.

Křivku $\mathfrak{u}$, stopu asymptotického kužele σ na rovině ϱ, snadno nyní nalezneme; neboť M a průsečík J přímky $\mathfrak{l}$ a přímky $\mathfrak{m}$, vedené bodem L rovnoběžně s přímkou $\mathfrak{m}_2$, jsou konjugované body kuželosečky $\mathfrak{u}$ a sestrojíme-li tedy k bodu A bod A' harmonický k těmto bodům M a J, bude bod tento dalším bodem křivky **u**; tečna v něm vedená dobíhá do bodu L. Poněvadž známe oskulaci v bodě A, lze ji dle předešlých method snadno stanoviti.

Z předešlých úvah jest patrno, že můžeme sestrojiti zborcené plochy tak, aby *středy oskulačních hyperboloidů byly položeny na dané prostorové křivce* a její povrchové přímky protínaly jinou danou křivku, nebo se dotýkaly dané rozvinutelné plochy.

Zvláštní případ nastává, volíme-li asymptotickou plochou plochu kuželovou; v tomto případě jsou veškeré *oskulační hyperboloidy soustředné.*

Jako příklad uveďme nejprve plochu čtvrtého stupně, která jest dána asymptotickým kuželem druhého stupně a přímkou; vyšetřme obecnější případ, kdy plocha jest dána přímkou **q** a kuželosečkou dotyčnou Σ v konečnu položenou na dané kuželové ploše S o vrcholu S; předpokládáme, že přímka **q** má ke kuželi S polohu obecnou.

Přímka **q** jest dvojnou přímkou zborcené plochy.

Libovolným bodem A_1 přímky **q** procházejí dvě přímky **a**, **a'** spojující bod A_1 s body A, A' kuželosečky Σ, v nichž se tečné roviny kužele S vedené bodem A_1 křivky Σ dotýkají. Podobně i v libovolné rovině β, která prochází přímkou **q** jsou položeny dvě přímky **b**, $\overline{\mathbf{b}}$, které spojují průsečíky B, $\overline{B}$ roviny β a kuželosečky Σ s průsečíky B_1, $\overline{B}_1$ přímky **q** s tečnými rovinami kuželové plochy sestrojenými podél přímek SB, $S\overline{B}$.

Poněvadž tyto tečné roviny tvoří pro veškeré polohy roviny β involuci, jejíž rovinou řídící jest polární rovina π průsečíku P přímky **q** s rovinou kuželosečky Σ, tvoří i body B_1, $\overline{B}_1$ involuci bodovou, jejíž dvojné body jsou body P a průsečík Q přímky **q** s rovinou π. Také body B, $\overline{B}$ tvoří na křivce Σ involuci, jejímž pólem jest bod P. Přímky **b**, $\overline{\mathbf{b}}$ protínají se tedy na rovině π a průsečíky jejich naplňují dvojnou kuželosečku Δ náležející vytvořené zborcené ploše; tato kuželosečka prochází bodem Q a vrcholem řídícího kužele S. Bodem Q procházejí totiž dvě přímky zborcené plochy, které jsou současně s přímkou **q** v jedné rovině, která obsahuje pól O stopy **o** roviny S **q** na rovině křivky Σ. Bod S jest průsečíkem dvou torsálních hran

c, $\overline{\mathbf{c}}$ zborcené plochy; tyto hrany jsou průsečné povrchové přímky řídícího kužele s rovinou S **q** a průsečíky jejich C, $\overline{C}$ s přímkou **q** jsou kuspidálními body dvojné přímky: tečné roviny podél těchto hran obsahují bod O. Dle toho bude se dvojná kuželosečka $\triangle$ v bodech Q a S dotýkati přímek $O\,Q$, $O\,S$.

Jak patrno, jest bod O pólem jisté involuce na křivce $\triangle$, projektivně přiřaděné involuci na přímce **q**; v bodových dvojinách involuce ($\triangle$) protínají se dvojiny povrchových přímek zborcené plochy, které vybíhají ze dvou přidružených bodů involuce (**q**). Obdržíme tedy na této ploše ∞^1 prostorových čtyřúhelníků, jichž společnou diagonálou jest přímka **q**; druhá proměnlivá diagonála probíhá bodem O a vytíná na křivce $\triangle$ dvojinu přidružených bodů.

Průsečíky D, D', v nichž rovina π křivky $\triangle$ protíná křivku Σ, jsou kuspidálními body dvojné kuželosečky; příslušné torsální hrany **d**, **d'** jsou tečnami křivky Σ v bodech D, D' a probíhají, jak patrno, bodem P.

Roviny obsahující dvě povrchové přímky zborcené plochy tvoří nejen svazek na ose **q**, nýbrž obalují ještě kuželovou plochu druhé třídy, jejímž vrcholem jest bod O. Na rovině S **q** obalují stopy těchto rovin kuželosečku Ω dotýkající se torsálních hran **c**, $\overline{\mathbf{c}}$, přímky **q** v bodě Q a stopy **o** roviny S **q** na rovině křivky Σ v bodě R, který leží na přímce **p** spojující body D, D'. Jelikož tečné roviny zborcené plochy podél torsálních hran **c**, $\overline{\mathbf{c}}$ procházejí bodem O, nedotýká se křivka Ω torsálních hran **c**, $\overline{\mathbf{c}}$ v kuspiďálních bodech C, $\overline{C}$ nýbrž v bodech, které jsou položeny na přímce, která vzhledem k bodu S odděluje harmonicky přímky **o** a **q**. Jak z předchozích vývodů vysvítá, lze křivku Ω vytvořiti jakožto obálku spojnic dvou projektivných řad právě na těchto přímkách **o**, **q** položených; v těchto řadách přísluší společnému bodu P, body Q resp. R.

Jest patrno, že pomocí kuželové plochy $O\,\Omega$ a svazku rovin kol přímky **q** můžeme danou zborcenou plochu vytvořiti způsobem duálním k předešlému, neboť opět jisté involuci rovin na přímce **q** přidružena jest projektivně jistá involuce tečných rovin kuželové plochy $O\Omega$; obě tyto involuce vytínají na rovině kuželosečky Σ involuce paprskové kolem bodů P, O tak, že čtyřstran tvořený dvěma konjugovanými dvojinami paprsků má ostatní čtyři vrcholy položeny na křivce Σ. Tyto vrcholy tvoří na kuželosečce Σ bodovou involuci čtvrtého stupně, jejíž řídící křivka třetí třídy rozpadá se na svazky paprskové o vrcholech O, P, R.

Z úvah těchto plyne, že vytvořená zborcená plocha jest unikursální a sama sobě duální; obsahuje nejen dvojnou křivku třetího stupně, rozpadlou na přímku a kuželosečku ji protínající, ale také rozvinutelnou plochu třetí třídy obalenou dvojnými tečnými rovinami a také rozpadlou na jednoduchý svazek rovin a plochu kuželovou druhé třídy, mající se svazkem jednu rovinu společnou.

Protíná-li přímka q kuželosečku Σ, nebo dotýká-li se přímka **q** řídící kuželové plochy, dostáváme zborcenou plochu třetího stupně; v prvém případě jest přímka **q** dvojnou přímkou a její jednoduchá další řídící přímka **e** spojuje pól **O** stopy **o** roviny S **q** na rovině křivky Σ se středem perspektivných řad na přímkách **o**, **q**, při čemž libovolnému bodu A_1 přímky **q** odpovídá průsečík přímky **o** s polárnou rovinou přímky $S\,A_1$ vzhledem k řídícímu kuželi S.

V druhém případě, kdy přímka **q** dotýká se řídícího kužele, jest přímka **q** jednoduchou řídící přímkou zborcené plochy; její dvojnásobná přímka **d** jest položena v polárné rovině π průsečíku P přímky **q** s rovinou čáry Σ vzhledem ke kuželi S a prochází mimo to dotyčným bodem druhé tečny vedené bodem P ke křivce Σ. Protíná-li přímka **q** kuželosečku Σ a leží-li při tom současně v tečné rovině řídící kuželové plochy S, redukuje se zborcená plocha na plochu stupně druhého.

Pro plochy, při nichž jest kužel S asymptotickým kuželem, platily by úvahy zcela obdobné.

Sur les surfaces réglées dont la développable asymptotique est donnée.

Par Dr. Jos. Klobouček.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans ce travail je donne la solution d'un problème qui est un cas particulier du problème de construiredirecte ment l'hyperboloïde osculateur le long d'une génératrice quelconque d'une surface réglée qui est déterminée par trois courbes gauches, ou trois surfaces développables, dont deux sont infiniment voisines.

J'ai montré dans un autre travail comment on peut effectuer la solution de ce problème général par une méthode directe, ici je donne quelques modalités constructives qui se présentent dans le cas où les deux courbes infiniment voisines sont situées à l'infini sur la développable asymptotique.

Nous considérons d'abord une surface réglée determinée par la développable asymptotique S et par une autre courbe gauche Σ_1 située hors de la surface S.

On cherche d'abord les génératrices, l'ordre de la surface et la trace $\mathbf{u}_1$ de l'hyperboloïde osculateur qui appartient à une génératrice $\mathbf{a}$, sur le plan osculateur ω_1 mené dans le point d'intersection A_1 de $\mathbf{a}$ avec la courbe Σ_1. Nous construisons en même temps la trace $\mathbf{u}$ du cône asymptotique de l'hyperboloïde sur le même plan, en nous rapellant que les points de l'arête de rebroussement de la développable asymptotique sont les centres S des tous les hyperboloïdes osculateurs, que la conique $\mathbf{u}_1$ est osculatrice de la courbe Σ_1 dans A_1 et que $\mathbf{u}$ est la conique de même qualité de la trace de la développable asymptotique dans le point d'intersection H d'une certaine de ses géneratrices $\mathbf{h} \parallel \mathbf{a}$ avec le plan ω_1 de cette courbe.

En se servant de quelques propriétés de la parabole connue ordinairement sous le nom de Steiner qui appartient au point H de la conique $\mathbf{u}$, nous pouvous tracer le diamètre $\mathbf{o}$ de nos deux coniques et déterminer le pôle G de la droite AHP, où $\overline{AH} = \overline{HP}$, par rapport à la conique $\mathbf{u}_1$. Nous appliquons de nouveau la parabole de Steiner au point A_1 de la $\mathbf{u}_1$ et nous traçon un sautre diamètre $\mathbf{o}_1$. Nous avons alors lec entre commun O des coniques $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ et il est facile de les construire complètement.

Alors nous avons la trace $\mathbf{u}_1$ de l'hyperboloïde osculateur et tout son cône directeur et il est lui même bien connu.

Puis on considère le cas particulier où la courbe Σ_1 est une droite $\mathbf{q}$, mais la courbe Σ et sa développable S qui déterminent sur S une autre courbe infiniment voisine à Σ ont une position finie.

On peut construire directement les génératrices **x** de l'hyperboloïde osculateur le long d'une génératrice **a** de la surface reglée qui passent par des points X pris librement sur la génératrice **a**. On peut éviter ici la construction de la trace **u** de l'hyperboloïde sur le plan osculatur ω de la courbe Σ menée dans le point A dans lequel la droite **a** rencontre la courbe Σ.

En continuant, nous posons la courbe Σ dans l'infini, la surface est alors déterminée par une droite **q** et par la développable asymptotique S. Le dernier cas principal donne la détermination de la surface reglée par la développable asymptotique S et par une autre surface développable S_1. Nous obtiendrons les génératrices **a** de cette surface si nous menons dans les plans tangents α de S les droites tangentes à la surface S_1 parallèles aux droites correspondantes de S situé dans α.

Nous donnons l'ordre de la surface et la construction de l'hyperboloïde osculateur. Nous cherchons d'abord le cône asymptotique σ de cet hyperboloïde dont le centre est un point S de l'arête de rebroussement de la surface S, et l'autre cône σ_1 circonscrit à l'hyperboloïde du points de contact S_1 du plan tangent α_1 de S_1 contenant la génératrice **a** avec l'arête de rebroussement de la même surface. Le point de contact A_1 de **a** avec S_1 donne le point de contact du plan α_1 avec l'hyperboloïde osculateur. Le cône σ est un cône osculateur de la surface S le long d'une génératrice **h** || **a** et la droite SA_1 est conjuguée au plan $\beta \,||\, \alpha_1$ mené par le centre S. Alors nous pouvons construire son diamètre **g** conjugué au plan S_1**h**. Le cône σ_1 possède avec l'hyperboloïde osculateur une courbe de contact $\mathbf{u}_1$ dont le plan passe par le point A_1 et est parallèle à la droite **g**.

Si nous désignons maintenant **p** la droite situé de même sur l'hyperboloïde parallèle et symétrique de **a** par rapport au centre S, on voit bien que la courbe $\mathbf{u}_1$ contient le point d'intersection A'_1 des droites **p**, **g'** où **g'** || **g** par le point A_1. La droite de contact du cône σ_1 avec le plan S_1**p** est donc la droite $S_1A'_1$ et parceque en même temps ce cône oscule la surface S le long de la droite S_1A_1, il est complètement déterminé. Ses deux plans tangents menés par la droite SS_1 sont aussi tangents au cône σ.

Pour effectuer la construction, nous considérons les traces $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}_2$ des cônes σ, σ_1 sur un plan ϱ quelconque.

D'après les notions précédentes, en appliquant les procedés indiqués d'abord, on peut construire premièrement la conique $\mathfrak{u}_2$, puis $\mathfrak{u}_1$ même. Puis nous trouvous facilement $\mathfrak{u}$.

Nous voyons de ce qui précède que nous pouvons considérer les surfaces réglées données par une courbe gauche ou par une surface développable dont tous les hyperboloïdes osculateurs possèdent, par rapport à un plan arbitrairement donné, des pôles qui sont des points d'une autre courbe gauche, donnée d'abord.

En fin, nous donnons l'exemple d'une surface de quatrième ordre qui est donnée par une droite $\mathfrak{q}$ et par une conique Σ située sur un cône S de deuxième degré dont le centre S est le pôle commun du plan de la conique, par rapport aux tous hyperboloïdes osculateurs de la surface reglée. Dans le cas particulier le point S peut être le centre de tous ces hyperboloïdes. Si la droite $\mathfrak{q}$ rencontre la conique Σ ou si $\mathfrak{q}$ est situé généralement dans un plan tangent du cône S, nous aurons une une surface du troisième ordre. Si ces deux cas se presséntent simultanément, nous avons une surface du deuxième ordre.

O křivkách, jichž normály hoví jisté podmínce.

Dr. **Ant. Pleskot** v Plzni.

Budiž dána přímka p na ní bod M a mimo ní bod A. Je-li B libovolný bod křivky, již máme stanoviti, pak určeme osu úsečky AB, jež protne přímku p v bodě P. Označme $MP = t$ a určeme na p bod Q dle podmínky $MQ = f(t)$, při čemž $f(t)$ jest funkce daná. Přímka BQ má býti normálou křivky v bodě B.

Volme přímku p za osu pravoúhlé soustavy k p. za osu Y; (obr. 1.) kolmici s bodu A na osu Y za osu x, jich průsečík budiž O. Souřadnice bodu A nechť jsou (a, o), bodu B (x, y), pořadnice bodu M budiž l.

Jest tedy:

$$OM = l, \qquad MP = t, \qquad MQ = f(t)$$

$$OQ = y + \frac{x}{y'}, \qquad OP = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2y},$$