pro bod ellipsy, kruhu, hyperboly a

$$x = \frac{p}{2A^2}, \quad y = \frac{p}{A}$$

pro bod paraboly. Řešení některých úloh stane se také přehledným, píšeme-li souřadnice bodu kuželosečky ve tvaru

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi$$

pro ellipsu, kruh ($a = b$) a

$$x = a \sec \varphi, \qquad y = b \, tg \, \varphi$$

pro hyperbolu. Přechod od svrchních hodnot k těmto dán jest vztahem

$$A = -\frac{b \cos \varphi}{a \sin \varphi}$$

pro ellipsu a

$$A = \frac{b}{a \sin \varphi}$$

pro hyperbolu. Uvedeme několik příkladů. (Dokončení.)

Několik poznámek o čtyrstěnu.

Napsal **Jan Schuster**, prof. reálky v Pardubicích.

(Dokončení.)

VIII. Podobně jako v trojúhelníku možná ze stran počítati příčky, známe-li dělicí poměry na stranách jimi stanovených bodů vzhledem k vrcholům, lze u čtyřstěnu určiti nejen příčky, ale i obsahy stěn vzniklých řezy vedenými hranami.

Obraťme se nejprve k těmto posledním. Hranou a' vedený řez Δ_a nechť stanoví na protější hraně a úseky x, y. přilehlé ke stěně Δ_1 resp. Δ_4. Platí: $x + y = a$. Jím se rozdělí stěny Δ_2 a Δ_3 v poměru $x : y$. Značme stěnové úhly $\sphericalangle\left(\Delta_2 \frac{x}{x+y}, \Delta_{a'}\right) = \omega_2$, $\sphericalangle\left(\Delta_3 \frac{x}{x+y}, \Delta_{a'}\right) = \omega_3$ se strany stěny Δ_1, pak úhly se strany Δ_4 budou výplňky jejich. Applikace první cosinové věty na oba vzniklé čtyřstěny vede k rovnicím:

$$\Delta_1^2 = \Delta_2^2 \frac{x^2}{a^2} + \Delta_3^2 \frac{x^2}{a^2} + \Delta_{a'}^2 - 2\Delta_2 \Delta_3 \frac{x^2}{a^2} \cos\alpha -$$

$$- 2\Delta_{a'} \Delta_2 \frac{x}{a} \cos\omega_2 - 2\Delta_{a'} \Delta_3 \frac{x}{a} \cos\omega_3,$$

$$\Delta_4^2 = \Delta_2^2 \frac{y^2}{a^2} + \Delta_3^2 \frac{y^2}{a^2} + \Delta_{a'}^2 - 2\Delta_2 \Delta_3 \frac{y^2}{a^2} \cos\alpha +$$

$$+ 2\Delta_{a'} \Delta_2 \frac{y}{a} \cos\omega_2 + 2\Delta'_a \Delta_3 \frac{y}{a} \cos\omega_3.$$

Násobme první z rovnic činitelem y, druhou činitelem x a sečtěme. Poslední dva členy se zruší. Když v ostatních členech vhodně sloučíme a zkrátíme, bude:

$$y\Delta_1^2 + x\Delta_4^2 = (\Delta_2^2 + \Delta_3^2)\frac{xy}{a} + \Delta_{a'}^2 a - \Delta_2 \Delta_3 \frac{xy}{a} \cos\alpha.$$

První a třetí člen na pravo se však dají sloučiti pomoc. rovnice (7), tak že je:

$$y\Delta_1^2 + x\Delta_4^2 = a\Delta_{a'}^2 + \frac{xy}{a} 4p_a^2. \qquad (18)$$

K téže rovnici jsme mohli dospěti planimetricky. Vedeme-li totiž ke hraně a' protějšími rohy rovnoběžky, možná se zachováním ploch přenésti vrcholy trojúhelníků $\Delta_1, \Delta_4, \Delta_{a'}$ do roviny souměrnosti úsečky a', ve které vznikne trojúhelník o ramenech $\frac{2\Delta_1}{a'}$, $\frac{2\Delta_4}{a'}$, příčce $\frac{2\Delta_{a'}}{a'}$, jež dělí protější stranu $a \sin\varphi_a$ v poměru $x : y$. Pak dá Stewartova věta, v trojúhelníku platná.

$$y \cdot \frac{a' \sin\varphi_a}{a} \frac{4\Delta_1^2}{a'^2} + x \cdot \frac{a' \sin\varphi_a}{a} \cdot \frac{4\Delta_4^2}{a'^2} = \frac{4\Delta_{a'}^2}{a'^2} \cdot a' \sin\varphi_a +$$

$$+ \frac{xy}{a^2} (a' \sin\varphi_a)^3.$$

Po zkrácení a užije-li se rovnice (16), obdrží se zase (18).

Z rovnice (18) možná odvoditi některé důsledky.

Nejprve určeme velikost řezů půlících hranu protější Pro ně jest $x = y = \frac{a}{2}$, tak že

$$\Delta_{a'}^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_4^2}{2} - p_a^2.$$

Střední řez, vedený hranou a na hranu a', jest podobně vyjádřen:

$$\Delta_a^2 = \frac{\Delta_2^2 + \Delta_3^2}{2} - p_a^2.$$

Odtud:

$$\Delta_a^2 + \Delta_{a'}^2 = 2\,(p_b^2 + p_c^2)$$

vzhledem k (8). Součet čtverců všech středních řezů je tedy:

$$\Delta_a^2 + \Delta_{a'}^2 + \Delta_b^2 + \Delta_{b'}^2 + \Delta_c^2 + \Delta_{c'}^2 = 4(p_a^2 + p_b^2 + p_c^2):$$

Délka těžnice, t. j. průsečnice dvou středních řezů nebo spojnice středů protějších hran se určí dvojím použitím věty Stewartovy na těžnice stěn a těžnici středního řezu, a jest:

$$t_a^2 = \frac{1}{4}\,[b^2 + c^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - a'^2]\,.$$

Řez, který půlí úhel α', dává v průmětu rovnoběžně s hranou a' vedeném, osu úhlu, a protíná protější stranu v poměru přilehlých ramen, t. j. v poměru stěn pobočných

$$x : y = \Delta_1 : \Delta_4, \text{ tak že } x = \frac{a\,\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_4}\quad y = \frac{a\,\Delta_4}{\Delta_1 + \Delta_4}.$$

Tím plyne:

$$\Delta_{a'}^2 = \frac{\Delta_1\,\Delta_4}{(\Delta_1 + \Delta_4)^2}\,[(\Delta_1 + \Delta_4)^2 - 4\,p_a^2]$$

nebo dle (7)

$$\Delta_{a'}^2 = \frac{\Delta_1\,\Delta_4}{(\Delta_1 + \Delta_4)^2}\,4\,\Delta_1\,\Delta_4 \cos^2\frac{\alpha}{2},$$

t. j.

$$\Delta_{a'} = \frac{2\,\Delta_1\,\Delta_4}{\Delta_1 + \Delta_4}\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Pomocí rovnice (18.) možná počítati nejmenší hodnotu řezu Δ_a, jenž v tom případě obsahuje osu mimoběžek. Když totiž k rovnici (18), dle $\Delta_{a'}$ řešené, připočteme rovnici $x + y = a$, znásobenou neurčitým parametrem λ, vzniknou částečnou derivací rovnice:

$$\Delta_1^2 - \frac{x}{a}\,4\,p_a^2 + \lambda = o \qquad \alpha) \qquad\qquad \Delta_4^2 - \frac{y}{a}\,4\,p_a^2 + \lambda = o \qquad \beta)$$

Pomocí obou těchto eliminujme z rovnice pro $\Delta_{a'}$ člen $\frac{x\,y}{a'}$, což dá:

$$y\,\Delta_1^2 + x\,\Delta_4^2 - \lambda\,a - 2\,a\,\Delta_{a'}^2 = o \qquad \gamma).$$

Pak eliminace veličin x, y λ z $\alpha), \beta), \gamma)$ a z rovnice $x + y = a$

vede na:
$$\begin{vmatrix} +1 & +1 & 0 & +1 \\ +4p_a^2 & 0 & 1 & \Delta_1^2 \\ 0 & +4p_a^2 & 1 & \Delta_4^2 \\ +\Delta_4^2 & +\Delta_1^2 & 1 & 2\Delta_{a'}^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad 19.$$

Hodnotu Δ_a^2 možno vypočítati buď z uvedené rovnice — odečtením druhého řádku od třetího a čtvrtého se sníží determinant na stupeň třetí, a když v tomto odečteme druhý sloupec od prvního i třetího, vznikne determinant, který rozvinutím a po úpravě dá Δ_a^2 s veličinou (12) na pravo — nebo přímo ze známé už hodnoty pro osu hran a a a' ze (17), ježto $\Delta_{a'} = \frac{1}{2} o_a a'$, t. j.

$$\Delta_a = \frac{M_{14}}{p_a}$$

Úseky x, y na hraně a se obdrží, když z rovnic $\alpha), \beta)$ vyloučíme λ, a rovnají se:

$$x = \frac{a}{8p_a^2}(4p_a^2 + \Delta_1^2 - \Delta_4^2) \quad y = \frac{a}{8p_a^2}(4p_a^2 - \Delta_1^2 + \Delta_4^2) \quad 20.$$

Jsou-li všecky stěny stejné, jest $x = y = \frac{a}{2}$. Osa mimoběžek se stotožní se spojnící středů protejších hran, t. j. těžnicí,

$$\Delta_{a'}^2 = \Delta^2 - p_a^2 = \Delta^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

IX. Veďme s vrcholu K_4 k nějakému bodu O podstavy Δ_4 jenž od vrcholů K_1, K_2, K_3 má vzdálenosti x, y, z, resp. příčku t_4. Tím se rozdělí podstava na trojúhelníky Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, jež leží střídavě naproti vrcholům K_1, K_2, K_3. Vedle toho příčka t_4, omezuje s pobočnými hranami a, b, c a se spojnicemi x, y, z tři trojúhelníky Δ_1'', Δ_2'', Δ_3'', z nichž každý přiléhá k vrcholu s týmž indexem. Applikace první věty cosinové (5.) na každý ze tří čtyřstěnů, jež mají při t_4 stěnové úhly $\varkappa, \mu, \nu$ proti a', b', c' resp., a při x, y, z na stranu kladnou úhly ξ, η, ζ, dá:

$$\Delta_1^2 = \Delta_1'^2 + \Delta_2''^2 + \Delta_3''^2 - 2\Delta_2''\Delta_3'' \cos\varkappa + \\ - 2\Delta_2''\Delta_1' \cos\eta + 2\Delta_1'\Delta_3'' \cos\zeta$$

$$\Delta_2^2 = \Delta_2'^2 + \Delta_3''^2 + \Delta_1''^2 - 2\Delta_3''\Delta_1'' \cos\mu - \\ - 2\Delta_3''\Delta_2' \cos\zeta + 2\Delta_2'\Delta_1'' \cos\xi$$

$$\Delta_3^2 = \Delta_3'^2 + \Delta_1''^2 + \Delta_2''^2 - 2\Delta_1''\Delta_2'' \cos\nu - \\ - 2\Delta_1''\Delta_3' \cos\xi + 2\Delta_3'\Delta_2'' \cos\eta.$$

Znásobíme-li tyto tři rovnice postupně činitelem $\Delta_2' \Delta_3'$, $\Delta_3' \Delta_1'$ a $\Delta_1' \Delta_2'$ resp. a sečteme, zruší se výrazy vzniklé z obou posledních členů rovnic, a obdržíme:

$$\Delta_1^2 \Delta_2' \Delta_3' + \Delta_2^2 \Delta_3' \Delta_1' + \Delta_3^2 \Delta_1' \Delta_2' = \Delta_1' \Delta_2' \Delta_3' . \Delta_4 + \Delta_1''^2 (\Delta_3' + \Delta_2') \Delta_1' + \Delta_2''^2 (\Delta_1' + \Delta_3') \Delta_2' + \Delta_3^2 (\Delta_1' + \Delta_2') \Delta_3, \\ - 2 \Delta_2' \Delta_3' \Delta_2'' \Delta_3'' \cos \varkappa - 2 \Delta_3'' \Delta_1'' \Delta_3' \Delta_1' \cos \mu - \\ - 2 \Delta_1'' \Delta_2'' \Delta_1' \Delta_2' \cos \nu. \qquad 21.$$

První člen na pravo vznikl sečtením prvních členů na pravo v hořejších rovnicích a vytčením společných činitelů. Když ve členech dalších na pravo užijeme též rovnice

$$\Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' = \Delta_4$$

obdržíme:

$$\Delta_1^2 \Delta_2' \Delta_3' + \Delta_2^2 \Delta_3' \Delta_1' + \Delta_3^2 \Delta_1' \Delta_2' = \Delta_4 [\Delta_1' \Delta_2' \Delta_3' + \Delta_1''^2 \Delta_1' + \\ + \Delta_2''^2 \Delta_2' + \Delta_3''^2 \Delta_3'] - \Delta_1'^2 \Delta_1''^2 - \Delta_2'^2 \Delta_2''^2 - \Delta_3'^2 \Delta_3''^2 \\ - 2 \Delta_2'' \Delta_2' \Delta_3'' \Delta_3' \cos \varkappa - 2 \Delta_3'' \Delta_3' \Delta_1'' \Delta_1' \cos \mu - \\ - 2 \Delta_1'' \Delta_1' \Delta_2'' \Delta_2' \cos \nu \qquad 22)$$

Je-li bod o těžištěm podstavy, jsou $\Delta_1' = \Delta_2' = \Delta_3' = \frac{\Delta_4}{3}$, a 21. dá:

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = \tfrac{1}{3} \Delta_4^2 + 2 [\Delta_1''^2 + \Delta_2''^2 + \Delta_3''^2] - \\ - 2 \Delta_2'' \Delta_3'' \cos \varkappa - 2 \Delta_3'' \Delta_1'' \cos \mu - 2 \Delta_1'' \Delta_2'' \cos \nu.$$

Abychom získali relaci, v níž vystupuje transversala t_4, vyjádříme cosinus sklonu protějších hran pomocí hran. Průmět hrany t na hranu c' jest

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 c'} + \frac{x^2 + c'^2 - y^2}{2 c'} - c' = \frac{b^2 - a^2 + x^2 - y^2}{2 c'} = \\ = t_4 \cos (c' t)$$

Tedy je $4 c'^2 t'^2 \sin^2 (c' t) = 4 c'^2 t_4^2 - (b^2 - a^2 + x^2 - y^2)^2$.

Levá strana je však rovna $16 (\Delta_3^2 + \Delta_3'^2 - 2 \Delta_3 \Delta_3' \cos \gamma')$ dle rovnice (7.)

Tudíž je

$$\tfrac{1}{4} c'^2 t_4^2 = \Delta_3^2 + \Delta_3'^2 - 2 \Delta_3 \Delta_3' \cos \gamma' + \frac{(b^2 - a^2 + x^2 - y^2)^2}{16}$$

Utvořme takové rovnice pro všechny části čtyrstěnu a sečtěme:

$$\tfrac{1}{4} t_4^2 (a'^2 + b'^2 + c'^2) = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_1'^2 + \Delta_2'^2 + \Delta_3'^2 - 2 \Delta_3 \Delta_3' \cos\gamma - 2 \Delta_1 \Delta_1' \cos\alpha - 2 \Delta_2 \Delta'_2 \cos\beta + \Sigma \frac{(b^2 - a^2 + x^2 - y^2)^2}{16} \qquad 23.$$

kde v součtu jest provésti cyklickou substituci.

Je-li t_4 těžnicí, pak

$$\Delta_1' = \Delta_2' = \Delta_3' = \tfrac{1}{3}\Delta_4, \quad z^2 = \left(\frac{a'^2 + b'^2}{2} - \frac{c'^2}{4}\right)\frac{4}{9}$$

atd., tedy $x^2 - y^2 = \frac{1}{3}(b'^2 - a'^2)$, sčítanec v součtu je $\frac{1}{144}(3 b^2 - 3 a^2 + b'^2 - a'^2)$. Pak $\frac{1}{4} t_4^2 (a'^2 + b'^2 + c'^2) = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - \frac{1}{3}\Delta_4^2 + \frac{1}{144}\Sigma(3 b^2 - 3 a^2 + b'^2 - a'^2)^2$.

Jsou-li všecky stěny stejné, ukázáno, že i hrany protější jsou si rovny, a je:

$$\tfrac{1}{4} t_4^2 (a^2 + b^2 + c^2) = \tfrac{8}{3}\Delta^2 + \tfrac{1}{9} \sum_{a\, b\, c} (b^2 - a^2)^2$$

Verifikace formule pro příčku se obdrží, jsou-li $\Delta_1', \Delta_2', \Delta_3'$ průměty stěn $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ na Δ_4, t. j. $t_4 = v_4$. Pak je $v_4^2 = b^2 - y^2 = c^2 - x^2 = a^2 - x^2$, výraz v součtu mizí, a rovnice se redukuje na identitu, v níž souhlasné členy na pravo i na levo jsou si rovny.

Výpočet úhlů $\varkappa, \mu, \nu$ a ploch $\Delta_1'', \Delta_2'', \Delta_3''$ se pak provede teprve pomocí t, neboť tyto stěny jsou pak určeny třemi stranami svými.

Poznámka ku konstrukci normál kuželoseček.

Dr. Ant. **Pleskot** v Plzni.

V ročníku 44. t. č. uvedl jsem důkaz této věty o kuželosečkách: Jsou-li na kuželosečce dány dva pevné body A a B a třetí pohyblivý bod C, tu symetrály úseček AC a BC protínají osy kuželosečky ku př. osu Y v bodech A_1 a B_1 a tu platí, že úsečka $A_1 B_1$ má konstantní hodnotu.

Této věty použijeme ku konstrukci normál kuželoseček. Volme pohyblivý bod C na kuželosečce tak, že stotožňuje se s bodem A.