Matyáš Lerch

O transformaci řad v řady rychleji konvergentní se zvláštním zřetelem k zobecněné harmonické řadě $R(u, s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(u+r)^s}$. II.

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 2-3, 161–173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121356

O transformaci řad v řady rychleji konvergentní se zvláštním zřetelem k zobecněné harmonické řadě $R(u, s) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(u+\nu)^s}$.

Píše M. Lerch v Brně.

(Pokračování.)

Obecný princip užité transformace spočívá v rovnicích

$$R = \sum_1^{\infty} f'(\nu), \quad S = \sum_1^{\infty} \left\{ f'(\nu) - \left[f\left(\nu + \frac{1}{2}\right) - f\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \right] \right\}, \tag{7}$$

$$f\left(\nu + \frac{1}{2}\right) - f\left(\nu - \frac{1}{2}\right) - f'(\nu) = \frac{f'''(\nu)}{24} + \frac{f^{(5)}(\nu)}{2^4 . 5!} + \dots$$

$$S = R + f(\tfrac{1}{2}); \quad f(\infty) = 0. \tag{7*}$$

Pro řadu
$$R' = \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} f(\nu)$$
zaveďme

$$S' = \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \left[f(\nu) - \frac{f\left(\nu - \frac{1}{2}\right) + f\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{2} \right],$$

načež
$$S' = R' + \frac{f(\frac{1}{2})}{2}.$$

Obecný člen v řadě S'

$$-\tau_{\nu} = \frac{f''(\nu)}{2!\,2^2} + \frac{f^{(4)}(\nu)}{4!\,2^4} + \dots,$$

t. j. řada S' konverguje stejně rychle jako
$$\Sigma f''(\nu).$$

Tím dospíváme k transformační methodě

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} f(\nu) = -\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \Delta^2 f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \Delta^2 f\left(\nu + \frac{1}{2}\right). \tag{8}$$

při čemž pravá strana vznikla z řady

$$-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\Delta^2 f\left(\nu-\frac{1}{2}\right), \qquad (8^a)$$

a difference se vztahují k přírůstku $\Delta\nu = \frac{1}{2}$.

V (8) můžeme řadu v pravo přetvořiti opět dle vzorce (8^a), takže

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu}f(\nu) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\Delta^2 f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\Delta^2 f(1)+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\Delta^4 f(\nu). \qquad (8^b)$$

Dle toho nalezneme na př. pro $f(x)=\frac{1}{x}$:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu} = -1+\frac{1}{3}-\frac{1}{24}+12\left(\frac{1}{2.3.4.5.6}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{4.5.6.7.8}+\frac{1}{6.7.8.9.10}-\frac{1}{8.9.10.11.12}+\dots\right);$$

s pěti členy v závorce tak

$$\log 2 = 0{\cdot}69314.$$

Transformujeme-li pravou stranu (8) stále dle téhož vzorce (8), obdržíme

$$(D)\left\{\begin{aligned} &\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu}f(\nu) \doteq \\ &-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\Delta^2 f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\Delta^2 f(1)+\frac{1}{4}\Delta^4 f(1) \\ &-\frac{1}{8}\Delta^4 f\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{8}\Delta^6 f\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{16}\Delta^6 f(2)+\frac{1}{16}\Delta^8 f(2) \\ &-\frac{1}{32}\Delta^8 f\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{32}\Delta^{10} f\left(\frac{5}{2}\right)-\dots \\ &-\frac{1}{2^n}\Delta^{2n-2} f\left(\frac{n}{2}\right)+\frac{1}{2^n}\Delta^{2n} f\left(\frac{n}{2}\right)+ \\ &\qquad +\frac{1}{2^n}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu}\Delta^{2n} f\left(\frac{n}{2}+\nu\right) \end{aligned}\right.$$

stále za podmínky $\Delta x = \frac{1}{2}$ v symbolech $\Delta^k f(x)$.

Pro $f(x)=\frac{1}{x}$,

$$\Delta^k\frac{1}{x}=\frac{(-1)^k k!}{2^k x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{2}\right)\dots\left(x+\frac{k}{2}\right)},$$

máme

$$\sum_1^\infty\frac{(-1)^\nu}{\nu}=-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{24}+\frac{1}{60}-\frac{1}{420}+\frac{1}{1008} \tag{9}$$

$$-\frac{1}{6720}+\frac{1}{15840}-\frac{1}{102960}+\frac{1}{240240}$$

$$+\frac{1}{32}\sum_1^\infty(-1)^\nu\Delta^{10}\frac{1}{\nu+\frac{5}{2}}.$$

Volme $f(x)=(u+x)^{-s}$, tedy

$$\sum_1^\infty(-1)^\nu f(\nu)=\sum_1^\infty\frac{(-1)^\nu}{(u+\nu)^s}=\sum_1^\infty\frac{1}{(u+2\nu)^s}-\sum_1^\infty\frac{1}{(u+2\nu-1)^s}$$

$$=\frac{1}{2^s}\left\{R\left(\frac{u+2}{2},s\right)-R\left(\frac{u+1}{2},s\right)\right\}=F(s,u),$$

$$F(s)=-\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\right)^{-s}+\frac{1}{2}\Delta^2\left(u+\frac{1}{2}\right)^{-s}-\frac{1}{4}\Delta^2\left(u+1\right)^{-s}$$

$$+\frac{1}{4}\Delta^4(u+1)^{-s}-\frac{1}{8}\Delta^4\left(u+\frac{3}{2}\right)^{-s}+\frac{1}{8}\Delta^6\left(u+\frac{3}{2}\right)^{-s}$$

$$-\frac{1}{16}\Delta^6(u+2)^{-s}+\frac{1}{16}\Delta^8(u+2)^{-s}-\frac{1}{32}\Delta^8\left(u+\frac{5}{2}\right)^{-s}$$

$$+\frac{1}{32}\Delta^{10}\left(u+\frac{5}{2}\right)^{-s}-\dots \tag{10}$$

při čemž

$$\Delta u=\frac{1}{2}.$$

Patrně

$$F(s,u+1)=-F(s,u)-\frac{1}{(u+1)^s};$$

řada konverguje pro všecka s a zakončí se pro $(s=-m)$ záporná celistvá s; $F(s,u)$ tu přechází v polynom. Totéž zjistíme o $R(u,s)$; rovnice

$$R(u,s)=\frac{1}{u^s}+R(u+1,s),\quad \int_0^1 R(u+x,s)\,dx=\frac{1}{(s-1)\,u^{s-1}}$$

přejdou pro $s=-m$ v

$$R(u+1,-m)=R(u,-m)-u^m,$$

$$\int_0^1 R(u+x,-m)\,dx=-\frac{u^{m+1}}{m+1},$$

a z těch vychází, že $-R(u,-m)$ je Bernoulliův polynom

$$R(u,-m)=-\overset{*}{S}_m(u).$$

Zaměníme-li v (10) u za $u-1$, máme pak $\left(\Delta u=\frac{1}{2}\right)$

$$2^m\left\{\overset{*}{S}_m\left(\frac{u}{2}\right)-\overset{*}{S}_m\left(\frac{u+1}{2}\right)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\right)^m+\frac{1}{2}\Delta^2\left(u-\frac{1}{2}\right)^m-\frac{1}{4}\Delta^2u^m$$

$$+\frac{1}{4}\Delta^4u^m-\frac{1}{8}\Delta^4\left(u+\frac{1}{2}\right)^m+\frac{1}{8}\Delta^6\left(u+\frac{1}{2}\right)^m- \tag{11}$$

$$-\frac{1}{16}\Delta^6(u+1)^m+\frac{1}{16}\Delta^8(u+1)^m-\dots$$

Pomocí vztahu $\overset{*}{S}_m\left(\frac{u}{2}\right)+\overset{*}{S}_m\left(\frac{u+1}{2}\right)=\frac{\overset{*}{S}_m(u)}{2^m}$

pak máme

$$\overset{*}{S}_m\left(\frac{u+1}{2}\right)-\overset{*}{S}_m\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{\overset{*}{S}_m(u)}{2^m}-2\overset{*}{S}_m\left(\frac{u}{2}\right),$$

a známý výraz

$$\overset{*}{S}_m(x)=\frac{x^{m+1}}{m+1}-\frac{x^m}{2}+\sum_{\nu=1,2,3,\dots}(-1)^{\nu-1}\binom{m}{2\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu}x^{m+1-2\nu}$$

podá tedy

$$\overset{*}{S}_m\left(\frac{u+1}{2}\right)-\overset{*}{S}_m\left(\frac{u}{2}\right)=$$

$$=\frac{u^m}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^m}\sum_{\nu=1,2,3,\dots}(-1)^\nu\binom{m}{2\nu-1}\left(2^{2\nu}-1\right)\frac{B_\nu}{2\nu}u^{m+1-2\nu}.$$

Rovnici (11) možno tedy psáti

$$\frac{u^m}{2}+\sum_{\nu=1,2,3,\ldots}(-1)^\nu\binom{m}{2\nu-1}\left(2^{2\nu}-1\right)\frac{B_\nu}{2\nu}u^{m+1-2\nu}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\right)^m-\frac{1}{2}\Delta^2\left(u-\frac{1}{2}\right)^m+\frac{1}{4}\Delta^2u^m$$

$$-\frac{1}{4}\Delta^4u^m+\frac{1}{8}\Delta^4\left(u+\frac{1}{2}\right)^m-\frac{1}{8}\Delta^6\left(u+\frac{1}{2}\right)^m+ \qquad (11^*)$$

$$+\frac{1}{16}\Delta^6(u+1)^m-\frac{1}{16}\Delta^8(u+1)^m+\ldots,\quad \Delta u=\frac{1}{2}.$$

Pro $u=0$ máme při tvoření diferencí všude jmenovatele 2^m; můžeme však klásti

$$\Delta^k v^m=\frac{1}{2^m}\Delta^k(2v)^m,\quad \Delta(2v)=1,$$

tedy

$$(-1)^{\frac{m+1}{2}}\left(2^{m+1}_{-1}\right)\frac{B_{\frac{m+1}{2}}}{m+1}=(-1)^m\frac{1}{2^{m+1}}-\frac{1}{2^{m+1}}\Delta^2(-1)^m+$$

$$+\frac{\Delta^2 0^m-\Delta^4 0^m}{2^{m+2}}+\frac{\Delta^4 1^m-\Delta^6 1^m}{2^{m+3}}+\frac{\Delta^6 2^m-\Delta^8 2^m}{2^{m+4}}+\ldots$$

Pro sudá m je tento výraz nullou a pro $m=2n-1$ zní to

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{n-1}2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)\frac{B_n}{2n}=1-\frac{\Delta^2 0^{2n-1}-\Delta^4 0^{2n-1}}{2}\\&-\frac{\Delta^4 1^{2n-1}-\Delta^6 1^{2n-1}}{2^2}-\frac{\Delta^6 2^{2n-1}-\Delta^8 2^{2n-1}}{2^3}-\ldots\end{aligned}\right\}\quad (12)$$

kde $\Delta\nu=1$; $\Delta^2(-1)^{2n-1}=0$.

$$n=3:2^6\left(2^6-1\right)\frac{1}{6.42}=1-\frac{30-240}{2}-\frac{360-0}{4}=16.$$

Na místě (10) je lépe psáti tvar elegantnější

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2^{2s-1}}\left[R\left(u+\frac{1}{2},s\right)-R(u+1,s)\right]\\&=(u+1)^{-s}-\Delta^2(u+1)^{-s}+\frac{\Delta^2(u+2)^{-s}-\Delta^4(u+2)^{-s}}{2}\\&+\frac{\Delta^4(u+3)^{-s}-\Delta^6(u+3)^{-s}}{2^2}.\\&\qquad+\frac{\Delta^6(u+4)^{-s}-\Delta^8(u+4)^{-s}}{2^3}+\ldots\end{aligned}\right\}\quad (10^*)$$

při čemž $\Delta u=1$.

Derivujme na $s = 0$ a užijme Schröderova výsledku výše vyloženého:

$$2 \log \frac{\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(u+1)} = 2 \log 2 - \log (u+1) + \Delta^2 \log (u+1)$$

$$+ \frac{\Delta^4 \log (u+2) - \Delta^2 \log (u+2)}{2} + \frac{\Delta^6 \log (u+3) - \Delta^4 \log (u+3)}{4}$$

$$+ \frac{\Delta^8 \log (u+4) - \Delta^6 \log (u+4)}{8} + \dots$$

čili lépe ($\Delta u = 1$)

$$\log \frac{\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(u)} = \log u + \log 2 + \frac{\Delta^2 \log (u+1) - \log (u+1)}{2}$$

$$+ \frac{\Delta^4 \log (u+2) - \Delta^2 \log (u+2)}{4} + \frac{\Delta^6 \log (u+3) - \Delta^4 \log (u+3)}{8}$$

$$+ \frac{\Delta^8 \log (u+4) - \Delta^6 \log (u+4)}{16} + \dots \tag{13}$$

Z vyjádření

$$\log w = \int_0^1 \left(x^{w-1} - 1\right) \frac{dx}{\log x}$$

plyne

$$\Delta^m \log w = (-1)^m \int_0^1 x^{w-1} (1-x)^m \frac{dx}{\log x},$$

$$\Delta^{2n} \log (u+n) = \int_0^1 x^{u+n-1} (1-x)^{2n} \frac{dx}{\log x}$$

$$= \mathfrak{M} \cdot \int_0^1 \frac{1-x}{\log x}\, dx = -\log 2 \,.\, \mathfrak{M},$$

kde $\mathfrak{M}$ je střední hodnota funkce

$$y = x^{u+n-1} (1-x)^{2n-1}.$$

Maximum nastane pro

$$x = \frac{u+n-1}{u+3n-2}, \qquad 1 - x = \frac{2n-1}{u+3n-2},$$

takže

$$\mathfrak{M} < \left(\frac{u+n-1}{u+3n-2}\right)^{u+n-1} \left(\frac{2n-1}{u+3n-2}\right)^{2n-1}.$$

Na př. pro $u = 2$, $n = 4$:

$$\operatorname{Log} \frac{5^5 \cdot 7^7}{12^{12}} = 0{\cdot}4604 - 4;$$

pro $u = 5$, $n = 4$:

$$\operatorname{Log} \frac{8^8 \cdot 7^7}{15^{15}} = 0{\cdot}3991 - 5.$$

Podržíme-li zbytek v řadě (10*), zakončí se pravá strana, výrazem

$$\frac{\Delta^{2n-2}(u+n)^{-s} - \Delta^{2n}(u+n)^{-s}}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_1^\infty (-1)^\nu \Delta^{2n}(u+n+2\nu)^{-s} \qquad (10^{n})$$

a řada (13) končí členy

$$\frac{\Delta^{2n} \log(u+n) - \Delta^{2n-2} \log(u+n)}{2^n} + \frac{1}{2^n} \sum_1^\infty (-1)^\nu \Delta^{2n} \log(u+n+2\nu) \qquad (13^{a})$$

Podle hořejšího výpočtu jest

$$0 < -\Delta^{2n} \log(u+n+2\nu) < \log 2 \cdot \frac{(u+n+2\nu-1)^{u+n+2\nu-1}(2n-1)^{2n-1}}{(u+3n+2\nu-2)^{u+3n+2\nu-2}}; \qquad (13^{b})$$

pro $u = 2$, $n = 2$, $\nu = 3$ tu máme

$$\operatorname{Log} \frac{9^9 3^3}{12^{12}} = 0{\cdot}0693 - 3,$$

dlužno k tomu připojit činitele $\log 2 = 0{\cdot}6931$, takže

$$\operatorname{Log} | \Delta^4 \log 10 | < 0{\cdot}9101 - 4;$$

skutečná hodnota jest

$$\operatorname{Log} | \Delta^4 \log 10 | = 0{\cdot}4742 - 4,$$

takže ocenění užité je vhodné.

Řada (10) pro $s = 1$ se zbytkem zní

$$\sum^\infty \frac{(-1)^\nu}{u+\nu} = -\frac{1}{2u+1} + \frac{2}{(2u+1)(2u+2)(2u+3)} - \frac{1}{(2u+2)(2u+3)(2u+4)}$$

$$+\frac{24}{2(2u+2)(2u+3)\dots(2u+6)}-\frac{24}{4(2u+3)\dots(2u+7)}$$

$$+\dots-\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(2u+n)(2u+n+1)\dots(2u+3n-2)}+$$

$$+\frac{(2n)!}{2^{n-1}(2u+n)\dots(2u+3n)}$$

$$+\frac{(2n)!}{2^{n-1}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2u+n+2\nu)(2u+n+2\nu+1)\dots(2u+3n+2\nu)},$$

s vynecháním zbytku má členy podobné stavby jako řada Eulerova

$$-\sum_{0}^{\infty}\frac{\nu!}{2^{\nu+1}(u+1)\dots(u+\nu)(u+\nu+1)}=-\left\{\frac{1}{2u+2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2u+2)(2u+4)}+\frac{1}{(2u+2)(2u+4)(2u+6)}+\dots\right\}$$

Kdyby šlo o počítání řady *)

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1}=\sum_{0}^{p}\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1}+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+\nu}}{2\nu+2p+1},$$

tedy o řadu

$$S=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu+u},\quad u=p+\frac{1}{2},$$

tu pro $p=7$, $2u=15$ je člen sedmý

$$\frac{-720}{2^3.19.20\dots25}=\frac{-1}{26919200}=-\delta$$

absolutně menší než $\frac{4}{10^8}$, s poloviční chybou bude

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+R,$$

$$R=\frac{1}{2.16}-\frac{1}{16.17.18}+\frac{1}{2.17.18.19}-\frac{6}{17.18.19.20.21}$$

$$+\frac{3}{18.19\dots22}-\frac{90}{18.19\dots24}+\frac{\delta}{2}.$$

*) Srovnej: K. Petr v Příloze k Časopisu roč. 42., str. 360.

Poslední tři členy v R se vypočtou pomocí logarithmů pětimístných a jsou

$$-0{\cdot}0^5 2457 + 0{\cdot}0^6 949 - 0{\cdot}0^7 52\,;$$

$$-\frac{1}{16.17.18} = -0{\cdot}0^3 204248, \qquad \frac{1}{2.17.18.19} = 0{\cdot}0^4 85999,$$

$$\frac{1}{32} = 0{\cdot}03125\,;$$

tudíž

$$R = 0{\cdot}031130188\,;$$

připojíme-li ještě korrekturu $\frac{\delta}{2} = 0{\cdot}0^7 17$, máme při zaokrouhlení na 8 míst poslední dvě číslice 20.

Obraťme se nyní ke vzorci (7*), jejž přepišme nejprve na tvar

$$\sum_1^\infty f(\nu) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)\,dx + \sum_1^\infty \left\{ f(\nu) - \int_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}} f(\xi)\,d\xi \right\};$$

na pravé straně odštěpme člen $\nu = 1$ a zaveďme označení

$$f_1(x) = f(x+1) - \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{3}{2}} f(\xi)\,d\xi,$$

podobně definujme f_2, f_3, . . ., obecně

$$f_{n+1}(x) = f_n(x+1) - \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{3}{2}} f_n(\xi)\,d\xi.$$

Tak obdržíme rovnice

$$\sum_1^\infty f(\nu) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)\,dx + f_1(0) + \sum_1^\infty f_1(\nu),$$

$$\sum_1^\infty f_1(\nu) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f_1(x)\,dx + f_2(0) + \sum_1^\infty f_2(\nu),$$

tedy obecně (při $f_0 = f$)

$$(E) \qquad \sum_{1}^{\infty} f(\nu) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f_\alpha(x)\,dx + \sum_{\varkappa=1}^{n} f_\varkappa(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_n(\nu).$$

Stanovení výrazů $f_n(x)$ proveďme v případě funkce

$$f(x) = (u+s)^{-s};$$

obdržíme postupně — při čemž dif. symbol $\varDelta$ hledí k $\varDelta u = 1$ —

$$f_1(x) = (u+x+1)^{-s} - \frac{\varDelta\left(u+x+\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{1-s},$$

$$f_2(x) = (u+x+2)^{-s} - 2\,\frac{\varDelta\left(u+x+\frac{3}{2}\right)^{1-s}}{1-s} + \\ + \frac{\varDelta^2(u+x+1)^{2-s}}{(1-s)(2-s)},$$

$$f_3(x) = (u+x+3)^{-s} - 3\,\frac{\varDelta\left(u+x+\frac{5}{2}\right)^{1-s}}{1-s} + \\ + 3\,\frac{\varDelta^2(u+x+2)^{2-s}}{(1-s)(2-s)} - \frac{\varDelta^3\left(u+x+\frac{3}{2}\right)^{3-s}}{(1-s)(2-s)(3-s)}$$

obecně

$$f_n(x) = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} \frac{\varDelta^\mu\left(u+x+n-\frac{\mu}{2}\right)^{\mu-s}}{(1-s)(2-s)\ldots(\mu-s)} = \\ = (u+x+n)^{-s} \mp \ldots \qquad (14)$$

Z binomické řady

$$(w+\alpha)^\sigma = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\sigma}{\nu} w^{\sigma-\nu} \alpha^\nu$$

vychází pro μ-tou diferenci podle w

$$\varDelta^\mu (w+\alpha)^\sigma = \binom{\sigma}{\mu} \mu!\, w^{\sigma-\mu} + \binom{\sigma}{\mu+1} \varDelta^\mu \alpha^{\mu+1} . w^{\sigma-\mu-1} + \ldots$$

a tedy pro členy výrazu (14)

$$\varDelta^{\mu}\left(u+x+n-\frac{\mu}{2}\right)^{\mu-s}=\frac{k}{(u+x)^{s}}+\frac{k'}{(u+x)^{s+1}}+\ldots,$$

takže pro $s>1$ lze všecky členy výrazu (14) integrovati do $x=\infty$; bude tudíž

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f_n(x)\,dx=-\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}\frac{\varDelta^{\mu}\left(u+n+\frac{1-\mu}{2}\right)^{\mu+1-s}}{(1-s)(2-s)\ldots(\mu+1-s)} \tag{15}$$

a máme dle vzorce (E):

$$R(u+1,s)=-\frac{\left(u+\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{1-s}+\left[(u+1)^{-s}-\frac{\varDelta\left(u+\frac{1}{2}\right)^{1-s}}{1-s}\right]-$$
$$-\left[\frac{\left(u+\frac{3}{2}\right)^{1-s}}{1-s}-\frac{\varDelta(u+1)^{2-s}}{(1-s)(2-s)}\right]$$
$$+\left[(u+2)^{-s}-2\frac{\varDelta\left(u+\frac{3}{2}\right)^{1-s}}{1-s}+\frac{\varDelta^{2}(u+1)^{2-s}}{(1-s)(2-s)}\right]-$$
$$-\left[\frac{\left(u+\frac{5}{2}\right)^{1-s}}{1-s}-2\frac{\varDelta(u+2)^{2-s}}{(1-s)(2-s)}+\frac{\varDelta^{2}\left(u+\frac{3}{2}\right)^{3-s}}{(1-s)(2-s)(3-s)}\right]$$
$$+\left[(u+3)^{-s}-3\frac{\varDelta\left(u+\frac{5}{2}\right)^{1-s}}{1-s}+3\frac{\varDelta^{2}(u+2)^{2-s}}{(1-s)(2-s)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\varDelta^{3}\left(u+\frac{3}{2}\right)^{3-s}}{(1-s)(2-s)(3-s)}\right]$$
$$-\left[\frac{\left(u+\frac{7}{2}\right)^{1-s}}{1-s}-3\frac{\varDelta(u+3)^{2-s}}{(1-s)(2-s)}+3\frac{\varDelta^{2}\left(u+\frac{5}{2}\right)^{3-s}}{(1-s)(2-s)(3-s)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\varDelta^{3}(u+2)^{4-s}}{(1-s)(2-s)(3-s)(4-s)}\right]+\cdots \tag{16}$$

při čemž jsme pominuli psáti zbytek $\sum_{1}^{\infty} f_n(\nu)$, který by následoval po $2n$-tém členu.

Výraz
$$\frac{\Delta^{\mu}(u+m)^{\mu-s}}{(1-s)(2-s)\dots(\mu-s)}, \quad (\Delta u = 1),$$
je vůči s vždy konečný (celistvá transcendenta), t. j. čitatel vymizí pro $s = 1, 2, \dots \mu$; neboť skutečně
$$\Delta^{\mu}(u+m)^{\mu-\varkappa} = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \dots);$$
tedy také součty těchto výrazů, t. j. $f_k(0)$ jsou konečny pro všecka s. Totéž platí o integrálu (15) pro $s = 2, 3, \dots$

Píšeme-li integrál (15) ve tvaru
$$-\frac{1}{1-s}\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}\frac{\Delta^{\mu}\left(u+n+\frac{1-\mu}{2}\right)^{\mu+1-s}}{(2-s)(3-s)\dots(\mu+1-s)},$$
shledáme, že součet Σ pro $s = 1$ má tvar
$$\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu} = 0,$$
a tedy výraz zůstává konečným pro $s = 1$, i má hodnotu
$$-\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}\frac{\Delta^{\mu}\left\{\left(u+n+\frac{1-\mu}{2}\right)^{\mu}\log\left(u+n+\frac{1-\mu}{2}\right)\right\}}{\mu!}.$$

Výraz $f_n(0)$ převedeme na základě vzorce
$$\frac{1}{w^{\sigma}} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^{\infty} e^{-wx}x^{\sigma-1}\,dx$$
po jednoduché transformaci na tvar
$$f_n(0) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} e^{-\left(u+\frac{n}{2}\right)x}\left(\frac{e^{-x}-1}{x^3}+\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x^2}\right)^n x^{s+2n-1}\,dx; \quad (17)$$
funkce
$$\frac{e^{-x}-1}{x^3}+\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x^2}$$

je na $x=0$ konečná a mizí pro $x=\infty$; je tedy absolutně pod určitou stálou mezí g a máme pro *real.* $s+2n>0$ konečné, mimo to pro realná s

$$|f_n(0)|<\frac{g^n}{|\Gamma(s)|}\cdot\frac{\Gamma(s+2n)}{\left(u+\frac{n}{2}\right)^{s+2n}}.$$

Není-li g značně malá konstanta, bude tento výraz zároveň s n libovolně velikým; ale pro stálé n máme odtud

$$|f_n(\nu)|<\left|\frac{g^n\Gamma(s+2n)}{\Gamma(s)}\right|\frac{1}{\left(u+\frac{n}{2}+\nu\right)^{s+2n}},$$

z čehož soudíme, že řada tvořící zbytek rozvoje (16)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_n(\nu)$$

konverguje stejně rychle jako řada $R\left(u+\frac{n}{2},\ s+2n\right)$. Vždy můžeme voliti n tak veliké, nechť je s jakékoli, aby zbytek v řadě (16) byl konvergentní; tak vychází, že funkce

$$R(u+1,s)-\frac{1}{s-1}$$

je pro všecka s pravidelná.

Z rovnice (17) vychází pro záporná celistvá $s=-m$, že $f_n(0)$ vymizí pro $n>\frac{m}{2}$, což dává zajímavou identitu

$$\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu\binom{n}{\mu}\frac{\Delta^\mu\left(u-\frac{\mu}{2}\right)^{m+\mu}}{(m+1)(m+2)\dots(m+\mu)}=0,\ (m<2n,\ \Delta u=1). \tag{18}$$

Na př. pro $n=2$, $m=3$, $u=2$

$$2^3-2\,\frac{\Delta\left(\frac{3}{2}\right)^4}{4}+\frac{\Delta^2 1^5}{4.5}=8-17+9.$$

V řadě (16) tedy pravá strana se zakončí (a zbytek vymizí) pro $s=-m$ a přejde v Bernoulliovu funkci

$$-S^*_m(u+1).$$

(Dokončení.)