Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Poznámky k řešení problému maxima a minima s vedlejšími podmínkami

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 5, 276--281

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121351

přibližuje se totiž při rostoucím n k sestupné posloupnosti geometrické tak rychle, že již pro $n = 30$ každý podíl této řady je větší než $\frac{15}{16}\varepsilon^2$ ale menší než $\frac{16}{16}\varepsilon^2$, kdežto pro $n = 0$ jest podíl $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{3}{16}\varepsilon^2$; z čehož vysvítá, že již pro $n = 30$ a tím spíše pro $n > 30$ *všichni podílové této řady jsou sobě bezmála rovni.*

Z relace (19) plyne pro $n = 0$ *přibližná hodnota*

$$1 - \mathfrak{R}'_1 = 1 - \frac{\frac{1}{4}\varepsilon^2}{1 - \frac{3}{16}\left[1 + \frac{2\varepsilon^2}{3(3-2\varepsilon^2)}\right]\varepsilon^2}$$
$$= 1 - \frac{(12 - 8\varepsilon^2)\,\varepsilon^2}{48 - (41 - 4\varepsilon^2)\,\varepsilon^2}, \tag{20}$$

jež pro $\varepsilon^2 \leqq \frac{1}{2}$ je správnější než hodnota (14) a tím správnější se stává, čím více ε^2 k nulle se přibližuje; obdržímeť pro $\varepsilon^2 = \frac{1}{2}$ tři, pro $\varepsilon^2 = 0{\cdot}4$ a $\varepsilon^2 = 0{\cdot}3$ čtyry, pro $\varepsilon^2 = 0{\cdot}2$ pět, pro $\varepsilon^2 = 0{\cdot}1$ šest nejvyšších číslic hledaného čísla $\{1 - \mathrm{R}\}$, konečně pro $\varepsilon^2 = 0$ přesnou hodnotu $1 - \mathfrak{R}'_1 = 1 = 1 - \mathrm{R}$.

Pro $\varepsilon^2 \leqq \frac{1}{10}$ zasluhuje přibližná hodnota (20) i před hodnotou (15) přednost.

Poznámky k řešení problému maxima a minima s vedlejšími podmínkami.

Sdílí

Matyáš Lerch.

1. Úkol stanoviti maximum aneb minimum funkce $V(x, y)$ proměnných x, y podrobených podmínce $f(x, y) = 0$ dá se formulovati geometricky a to dvojím spůsobem, jak považujeme x, y za souřadnice bodu neb přímky, a sice:

a) Má se ustanoviti bod křivky $f(x, y) = 0$, jemuž odpovídá největší aneb nejmenší hodnota funkce $V(x, y)$ jeho souřadnic x, y.

b) Má se ustanoviti tečna křivky $f(x, y) = 0$, jíž odpovídá maximum aneb minimum funkce $V(x, y)$ jejich souřadnic x, y.

Ad *a*) Je-li funkce V maximum aneb minimum, mizí její differenciál, t. j. ona má stálou hodnotu v nekonečně blízkém sousedství bodu, jemuž odpovídá ono maximum aneb minimum.

Jinak řečeno, hodnoty funkce V pro dva sousední body křivky dané jsou si rovny. Sestrojíme-li tedy body roviny, jimž odpovídá tatáž hodnota funkce V jako bodu právě uvažovanému a, a které naplňují jistou křivku $V = \text{const}$, bude tato křivka také obsahovati soumezný bod a' bodu a na křivce dané, t. j. bude se této v bodě a dotýkati.

Problém řeší se tedy následovně: Z nekonečného množství křivek, jimž přísluší vlastnosť $V = \text{const}$, vyberou se ony, které se dané křivky dotýkají; body dotyčné jsou hledané body křivky dané.

Ad *b*) Analogicky řeší se úloha reciproká:

Aby se ustanovila tečna dané křivky, jíž přísluší maximum aneb minimum funkce V jejich souřadnic, vede se křivka vyhovující podmínce $V = \text{const.}$, která se dané dotýká. Společná tečna je hledanou přímkou.

Daná křivka zastoupena býti může též bodem, jímž hledaná přímka (tečna) má procházeti. V tom případě vede se křivka $V = \text{const.}$ obsahující bod daný a její tečna v něm je přímkou hledanou.

Příklady. Abychom ustanovili bod křivky dané, jemuž přísluší maximum aneb minimum úhlu, v kterém se z něho promítá konstantní délka, veďme kružnici procházející koncovými body této délky a dotýkající se dané křivky v bodě hledaném.

Obecnější je úkol: Určiti bod křivky dané, jemuž odpovídá největší aneb nejmenší hodnota dvojpoměru čtyř paprsků promítajících jej z čtyř bodů pevných.

Křivka $V = \text{const.}$ je zde patrně kuželosečkou, která prochází oněmi čtyřmi body pevnými. Následovně vedeme kuželosečku daného svazku, která se dané křivky dotýká.

Je-li daná křivka algebraická stupně n o δ bodech dvojných, $\varkappa$ vratných, mající mimo to v oněch pevných bodech resp. body p, q, r, s-násobné, obdržíme
$n(n+1) - [p(p+1) + q(q+1) + r(r+1) + s(s+1) + 2\delta + 3\varkappa]$
řešení.

Tak na příklad poskytne strophoïda, křivka to třetího stupně s bodem dvojným obsahující pomyslné body kruhové v nekonečnu pro obecnou polohu dané délky šestero řešení prvého úkolu, poněvadž tu $p = q = 1$, $r = s = 0$, $\delta = 1$, $\varkappa = 0$.

Chceme li daným bodem vésti přímku stanovící na dvou rovnoběžkách body, jichž vzdáleností ode dvou pevných bodů těchto rovnoběžek součin je maximum nebo minimum, veďme tečnu kuželosečky, která se dotýká daných rovnoběžek v bodech počátečných a prochází bodem daným.

2. Buďtež u, v dva parametry stanovící polohu jisté proměnné křivky C; podrobíme-li tyto parametry podmínce

$$\varphi(u, v) = 0,$$

můžeme jeden z těchto parametrů vyloučiti, a následovně obdržíme řadu křivek, jež připouštějí obálku, která také může sestávati z několika bodů. Máme-li ustanoviti onu z křivek C, jíž odpovídá maximum aneb minimum funkce $V(u, v)$ parametrů jejich, uvažme, že musí differenciál této funkce zmizeti, což vyžaduje, aby tato měla stejnou hodnotu pro dvě sousední polohy křivky C, na př. C_1 C'_1. Sestrojíme-li nyní obálku $(C)_V$ křivek, jimž přísluší táž hodnota funkce V jako křivce C_1, tuť patrno, že mezi těmito křivkami obalenými nalezá se též křivka C'_1. Křivky C_1, C'_1 dotýkají se patrně dvou křivek vyjádřených rovnicemi $\varphi = 0$, $V = \text{const.}$ jakožto obálek dvou soustav čar, a poněvadž jsou samy soumezné, musí se tyto obálky vespolek dotýkati.

Z této úvahy plyne bezprostředně:

Abychom sestrojili křivku řady $\varphi(u, v) = 0$, jíž přísluší maximum anebo minimum funkce $V(u, v)$ jejich parametrů, sestrojíme onu obálku řady $V = \text{const.}$, která se obálky dané řady dotýká. Dotyčným bodem stanovena je pak křivka hledaná.

Při tom podotýkám, že se rovnice obálky řady $V = \text{const.}$ obdrží spůsobem obecně známým. Je-li $\psi(x, y, u, v) = 0$ rovnice křivky (u, v), vyloučíme u, v z rovnic

$$V(u, v) = \text{const.},$$
$$\psi(x, y, u, v) = 0,$$
$$dV \equiv \frac{\partial V}{\partial u} du + \frac{\partial V}{\partial v} dv = 0,$$
$$d\psi \equiv \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = 0.$$

Při tom možno poslední dvě rovnice nahraditi jedinou a sice

$$\frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0,$$

která vznikla z nich vyloučením du, dv.

Jakožto příklad řešme úkol: Stanoviti ellipsu s daným středem a směrem os, která daným bodem procházejíc nejmenší má kvadraturu. Znamenáme-li u, v převratné hodnoty čtverců poloos, bude rovnice hledané ellipsy tvaru

$$\psi \equiv ux^2 + vy^2 - 1 = 0.$$

Jelikož ploský obsah bude $\frac{\pi}{\sqrt{u \, . \, v}}$, můžeme klásti $V = u \, . \, v$ a následovně bude potřebí vyloučiti u, v z rovnic

$$(\alpha) \qquad ux^2 + vy^2 - 1 = 0,$$
$$(\beta) \qquad uv = \text{const.},$$
$$(\gamma) \qquad vy^2 - ux^2 = 0.$$

Sečteme-li a odečteme-li (α) a (γ), obdržíme

$$u = \frac{1}{2x^2}, \quad v = \frac{1}{2y^2},$$

čehož vložením do (β) vznikne

$$xy = \text{const.},$$

kterážto rovnice náleží rovnostranné hyperbole.

Vedeme tedy tuto křivku daným bodem a určíme ellipsu, která se jí v něm dotýká. Tečna oběma společná obdrží se tím, že se bod osy úseček mající vzdálenost od počátku rovnou dvojnásobné úsečce daného bodu spojí s tímto. —

3. Při funkcích o třech proměnných, jež můžeme považovati za souřadnice bodu aneb roviny v prostoru, může vyskytnouti se podmínka jedna aneb dvě.

Dána-li jediná podmínka vedlejší, pro niž má funkce $V(x, y, z)$ nabýti hodnoty největší aneb nejmenší, tlumočí se problém geometricky takto:

a) Má se ustanoviti bod plochy $f(x, y, z) = 0$, pro nějž má funkce $V(x, y, z)$ hodnotu největší aneb nejmenší.

b) Má se ustanoviti tečná rovina plochy, jíž odpovídá největší aneb nejmenší hodnotu funkce $V(x, y, z)$ jejich souřadnic.

Řešení. Obdobným předešlému spůsobem řešíme úkoly tyto následovně:

ad *a*) Vedeme plochu, jíž přísluší vlastnosť $V = \text{const.}$, a která se dané plochy dotýká; bod dotyčný řeší problém.

ad *b*) Totéž učiníme i zde; společná rovina tečná je hledanou. — Je-li daná plocha bodem, vede se tímto ona plocha pomocná a sestrojí se k ní tečná rovina.

Dány-li jsou dvě podmínky, zní geometrická interpretace následovně:

c) Ustanoviti bod křivky $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, jemuž odpovídá maximum aneb minimum funkce $V(x, y, z)$ jeho souřadnic.

d) Určiti rovinu oskulační křivky dané, jíž odpovídá maximum aneb minimum funkce $V(x, y, z)$ jejích souřadnic.

Oba tyto úkoly řeší se následovně:

Vede se dotyčná plocha dané čáry, jíž přísluší vlastnosť $V = \text{const.}$

4. Buďtež u, v, w parametry stanovící jistou plochu. Veškery plochy C, jež vyhovují podmínce

$$\varphi(u, v, w) = 0$$

tvoří jistou soustavu a mají svou obálku. Abychom ustanovili onu plochu C_1, jíž přísluší maximum aneb minimum funkce $V(u, v, w)$, ustanovme obálku soustavy $V = \text{const.}$ tak, aby se dotýkala obálka soustavy dané. Příslušná bodu dotyčnému plocha C_1 řeší problém.

Příklad. Sestrojte ellipsoid, který má střed v počátku a osy své v osách soustavy souřadnic pravoúhlých, a který má nejmenší krychlový obsah ze všech daným bodem vedených toho druhu ploch. Užijeme zde známé věty: Obálka ellipsoidů majících stálý střed, směr os a krychlový obsah je plocha stupně třetího o rovnici $xyz = \text{const.}$

Rovina tečná této plochy tvoří na osách úseky třikráte tak velké, jako jsou příslušné souřadnice bodu dotyčného.

Daným bodem veďme tedy takovouto rovinu a k ní tečný ellipsoid.

5. Podrobíme-li parametry u, v, w dvěma podmínkám, obdržíme řadu ploch, které mají obálku, jež se každé z nich dotýká podél jisté křivky karakteristikou zvané. Abychom sestrojili plochu, jíž přísluší maximum aneb minimum funkce $V(u, v, w)$ jejich parametrů, sestrojme obálku soustavy $V = \text{const.}$, která se obálky dané řady dotýká podél jedné karakteristiky.

Pravděpodobnost a posteriori.

Napsal

Augustin Pánek.

(Dokončení.)

Pravděpodobnost, že v 5. pokuse vyňata bude kulička bílá, když již 3krát byla bílá a jednou černá vyňata, jest dle (4)

$$K = \frac{256}{584} \cdot \frac{4}{5} + \frac{216}{584} \cdot \frac{3}{5} + \frac{96}{584} \cdot \frac{2}{5} + \frac{16}{584} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1880}{2920} = \frac{47}{73}.$$

Týmž činem obdržíme pravděpodobnost K′, že v pátém pokuse vytáhneme kuličku černou, aneb kratčeji dle známého vzorce

$$K' = 1 - K.$$

Příklad 2. V osudí jsou kuličky bílé neb černé počtem r; vytáhneme-li kuličku bílou, jaká jest pravděpodobnost, že v témž osudí jest n bílých kuliček.*)

Především jest $n \leqq r$, a hledíme-li k danému počtu kuliček, máme r možných supposic, že totiž vytáhneme z osudí kuličku bílou.

Dle 1.	supposice	jest	v osudí	1 bílá,	$r - 1$ černá kulička,
„ 2.	„	jsou	„	2 bílé,	$r - 2$ černé kuličky,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„ n.	„	jest	„	n bílých,	$r - n$ černých kuliček,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„ r.	„	„	„	r bílých,	0 černá kulička.

*) Viz: *Poisson-Schnuse*, str. 60.