Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 5, 295--308

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121349

Úlohy.

Řešení úlohy 12.

(Zaslal p. *Karel Lad. Špaček*, VI. r. obec. r. gymn. v Praze).

Z dané rovnice

$$(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0\,^*)$$

jde

$$(x^2-x+1)^2=5x^2\pm\sqrt{25x^4-9x^4},$$

tedy buď $(x^2-x+1)^2=9x^2$, aneb $(x^2-x+1)^2=x^2$.

(1) $x^2-x+1=3x$ podává $x_1=2+\sqrt{3}$, $x_2=2-\sqrt{3}$;

$x^2-x+1=-3x$ podává $x_3=x_4=-1$.

(2) $x^2-x+1=x$ podává $x_5=x_6=1$;

$x^2-x+1=-x$ podává $x_7=\sqrt{-1}$, $x_8=-\sqrt{-1}$.

Tutéž úlohu řešili pp. *Fr. J. Kočí*, VII. g. v Jičíně, *Jos. Mašek*, VI. r. obec. real. gymn. v Praze, *Václ. Spěvák*, VII. g. v Jindř. Hradci, *Jos. Štulc*, VI. r. obec. stř. školy v Praze.

Řešení úlohy 13.

(Zaslal p. *Jos. Novák*, VII. tř. r. v Litomyšli.)

Danou rovnicí

$$\frac{(x^2+ax+1)^2}{(x^2+bx+1)(x^2+cx+1)}=\frac{(a-b)(a-c)}{bc}$$

převedeme vynásobením na tvar

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Ax+1=0,$$

kdež k vůli stručnosti litery A, B značí:

$$A=\frac{(a-b)(a-c)(b+c)-2abc}{a(a-b-c)},$$

$$B=\frac{2a^2+b^2c^2-2a(b+c)-abc(b+c)}{a(a-b-c)}.$$

Rovnice jest reciprokou a proto ji, dle obecného návodu, píšeme

$$x^2+\frac{1}{x^2}+A\left(x+\frac{1}{x}\right)+B=0.$$

---

*) Tiskovou chybou se stalo, že tato úloha byla nesprávně formulována, čehož si ostatně všichni pp. řešitelové povšimli.

Položivše $x+\frac{1}{x}=y$, máme zmocnění $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, tedy

$$y^2-2+Ay+B=0.$$

Řešením obdržíme dvě hodnoty y, z nichž každá dle rovnice

$$x+\frac{1}{x}=y$$

podává opět dvě hodnoty

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}.$$

Skutečným provedením počtu nalezneme hledané čtyry kořeny

$$x_1=\frac{bc+\sqrt{b^2c^2-4(a-b-c)^2}}{2(a-b-c)},$$

$$x_2=\frac{bc-\sqrt{b^2c^2-4(a-b-c)^2}}{2(a-b-c)},$$

$$x_3=\frac{bc-ab-ac+\sqrt{(bc-ab-ac)^2-4a^2}}{2a},$$

$$x_4=\frac{bc-ab-ac-\sqrt{(bc-ab-ac)^2-4a^2}}{2a}.$$

Řešení úlohy 14.

(Zaslal p. *Jar. Mašek,* VI. r. obec. stř. školy v Praze).

Danou rovnici

$$(x-a)(x-3a)(x-8a)(x+4a)=b^4-35a^2b^2$$

pišme

$$(x^2-4ax+3a^2)(x^2-4ax-32a^2)=b^4-35a^2b^2.$$

Položivše

$$x^2-4ax=y,$$

máme kvadratickou rovnici

$$y^2-29a^2y-96a^4=b^4-35a^2b^2,$$

z níž vypočteme y, z toho pak x. Nalezneme

$$x_1=2a+\sqrt{36a^2-b^2},\quad x_2=2a-\sqrt{36a^2-b^2},$$
$$x_3=2a+\sqrt{a^2+b^2},\quad x_4=2a-\sqrt{a^2+b^2}.$$

Tutéž úlohu řešili pp. *Ant. Lukeš*, VII. g. v Jičíně, *Frt. Nušl*, III. g. v Jindř. Hradci, *Jos. Štulc*, VI. r. obec. stř. školy v Praze, *Ant. Pleskot*, V. g. v Chrudimi, *Jos. Novák*, VII. r. v Litomyšli, *Karel Lad. Špaček*, VI. ob. r. g. v Praze, *Fr. Jos. Kočí*, VII. g. v Jičíně, *Václ. Spěvák*, VIII. g. v Jindř. Hradci

Řešení úlohy 19.

Zasaďme jeden hrot kružítka na kouli do bodu A a narýsujme při libovolné vzdálenosti s obou hrotů na kouli kružnici K. Vytkněme si v této tři libovolné body B, C, D; pak patrně $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = s$. Změřivše délky BC, BD, CD, vypečteme poloměr r kružnice K opsané trojúhelníku BCD.

Myslíme-li si nyní velkou kružnici na kouli vedenou body A, B, máme patrně proporci

$$2R : s = s : \sqrt{s^2 - r^2},$$

kde R značí hledaný poloměr koule. Tedy

$$R = \tfrac{1}{2} \frac{s^2}{\sqrt{s^2 - r^2}}.$$

Řešení, ač ne úplné, zaslali pp. *Karel Minářík*, VI. r. v Praze, *Ant. Lukeš*, VII. g. v Jičíně.

Řešení úlohy 20.

(Zaslal *Fr. Jos. Kočí*, VII. g. v Jičíně).

Válec o výšce V měj poloměr r, válec o výšce v poloměr R. Pak má platiti

$$2\pi r V = \pi R^2; \quad 2\pi R v = \pi r^2$$

t. j.

$$r = \frac{R^2}{2V}; \quad R = \frac{r^2}{2v}.$$

Dosazením druhé hodnoty do první máme

$$r = 2 \sqrt[3]{Vv^2} \text{ a obdobně } R = 2 \sqrt[3]{vV^2}.$$

Nyní

$$K = \pi r^2 V = 742631 \text{ krychl. cm.}$$
$$k = \pi R^2 v = 634854 \text{ krychl. cm.}$$

Tutéž úlohu řešili pp. *Ot. Novotný*, VII. g. v Ml. Boleslavi, *Jar. Mašek*, VI. r. ob. stř. šk. v Praze, *Václ. Spěvák*, VII. g. v Jindř. Hradci, *Ant. Pleskot*, V. g. v Chrudimi, *K. L. Špaček*, VI. r. ob. stř. šk. v Praze, *Fr. Čermák*, VII. g. v Jindř. Hradci, *Moric Hirsch*, VI. r. g. v Chrudimi, *Jos. Novák*, VII. r. v Litomyšli, *Fr. Froněk*, VII. g. v Budějovicích, *Fr. Fišer*, VI. r. g. v Roudnici, *Ant. Klíma*, VI. g. v Písku, *Ferd. Zuna*, VI. g. v Písku, *Fr. Nušl*, III. g. v Jindř. Hradci, *Jos. Zamazal*, V. r. g. v Chrudimi, *Karel Bohdaský*, VII. r. g. v Chrudimi, *Ant. Lukeš*, VII. g. v Jičíně, *Fr. Fabinger*.

Řešení úlohy 21.

(Zaslal p. *Jos. Novák*, VII. tř. r. v Litomyšli.)

Poloměry kruhů v menší základně buďte r_1 a $R_1 > r_1$, ve větší základně r a $R > r$. Strana kuželové roury buď s, tloušťka t, a výška (t. j. vzdálenost základen) budiž v. Krychlový obsah L roury se jeví co rozdíl $K - K_1$ krychlových obsahů dvou komolých kuželů,

$$K = \tfrac{1}{3}\pi v\,(R^2 + R_1^2 + RR_1),$$
$$K_1 = \tfrac{1}{3}\pi v\,(r_2 + r_1^2 + rr_1),$$
$$L = K - K_1 =$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi v\,[(R + r)(R - r) + (R_1 + r_1)(R_1 - r_1) + RR_1 - rr_1].$$

Značí-li α úhel sevřený osou a hranami kužele, máme

$$R - r = R_1 - r_1 = \frac{t}{\cos\alpha}; \quad v = s\cos\alpha,$$
$$R = r + \frac{t}{\cos\alpha}, \quad R_1 - r_1 + \frac{t}{\cos\alpha},$$

tedy

$$RR_1 - rr_1 = \frac{r_1 t}{\cos\alpha} + \frac{rt}{\cos\alpha} + \frac{t^2}{\cos^2\alpha}.$$

Dosazením těchto hodnot obdržíme

$$L = \tfrac{1}{3}\pi st\left[R + r + R_1 + r_1 + r + r_1 + \frac{t}{\cos\alpha}\right],$$
$$L = \tfrac{1}{3}\pi st\left[R + R_1 + r\,(r + r_1) + \frac{t}{\cos\alpha}\right].$$

Pláště kuželů P, p jsou dány formulemi

$$P = \pi (R + R_1)\,s, \quad p = \pi (r + r_1)\,s,$$

tedy

$$L = \frac{1}{3} t \left[P + 2p \cdot r \frac{\pi t s}{\cos \alpha} \right].$$

Avšak

$$\frac{t}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} (R - r + R_1 - r_1) = \frac{1}{2} [R + R_1 - (r - r_1)],$$

čímž

$$\pi s \frac{t}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} (P - p),$$

a tedy

$$L = \frac{1}{3} t [P + 2p + \frac{1}{2} (P - p)] = \frac{t}{2} (P + p).$$

$$L = 272 \text{ krychl. cm.}$$

Poznámka red. Pan prof. *V. Jelínek*, jenž úkol ten proponoval, upravil řešení stručně takto: Má-li roura výšku v, zevnější poloměry R a R_1, šířku kraje a, obdržíme odčítáním dvou komolých kuželů hmotný obsah

$$L = av\pi (R + R_1 - a),$$

pak ze $t : a = v : s$ dostaneme $av = ts$, konečně jest

$$P + p = (R + R_1 + R - a + R_1 - a) s\pi = 2 (R + R_1 - a) s\pi,$$

$$R + r - a = \frac{P + p}{2 s \pi},$$

pročež

$$L = ts\pi \frac{P + p}{2 s \pi} = \frac{t}{2} (P + p).$$

Řešení správné, však ne přesně odůvodněné, zaslal pan *Jar. Mašek*, VI. r. ob. stř. šk. v Praze.

Řešení úlohy 15.

(Zaslal p. *A. B C.*)

Aby výraz

$$\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3^2\varepsilon_3 + \ldots + 3^n \varepsilon_{n+1},$$

v němž ε_λ jest buď ± 1, neb ± 2 aneb 0, se rovnal nulle, musí každé ε_λ rovnati se nulle. Neboť dělivše výraz třemi, obdržíme ε_1 co zbytek, pročež se musí ε_1 rovnati nulle. Vyjmeme-li ze zbývajícího výrazu činitele 3, musí druhý činitel býti opět nullou, pročež obdobně soudíme, že $\varepsilon_2 = 0$ atd.

Z toho jde ihned, že celistvé číslo N lze jen jediným způsobem vyjádřiti výrazem

$$N = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3^2\varepsilon_3 + \ldots + 3^n\varepsilon_{n+1},$$

kdež nyní ε_λ značí $+1$, neb -1 neb 0. Neboť kdyby

$$N = \varepsilon'_1 + 3\varepsilon'_2 + 3\varepsilon'_3 + \ldots,$$

kdež ε'_λ opět značí buď ± 1 neb 0, tu bychom odčítáním obdrželi,

$$0 = \eta_1 + 3\eta_2 + 3^2\eta_3 + \ldots,$$

když η_λ značí ± 1, neb ± 2 neb 0, pročež každé η_λ jest nullou t. j. každé $\varepsilon_\lambda = \varepsilon'_\lambda$.

Největší číslo, které tu obdržíme, je-li 3^n nejvyšší mocnost se vyskytující, jest patrně

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

a nejmenší (při $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = .. = \varepsilon_{n+1} = -1$) patrně $-\frac{3^{n+1} - 1}{2}$.

Nabývají-li $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{n+1}$, na všechny způsoby hodnot $+1$, -1, 0, můžeme tedy obdržeti jen čísla

$$0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{3^{n-1} - 1}{2}$$

jichž počet jest $1 + 2\frac{3^{n+1} - 1}{2}$ t. j. 3^{n+1}. Tato ale musíme obdržeti vesměs, poněvadž každé ε může míti tři hodnoty (0, ± 1), tedy celkem 3^{n+1} sestav, a poněvadž žádné dva takto vyvozené výrazy nemohou se rovnati. Vzhledem k tomu, že n můžeme zvoliti jak velké chceme, representuje náš výraz *každé* celistvé číslo a jen jednou.

Poznámka red. Téhož výsledku se doděláme následující cestou.

Označme literou N celistvé kladné číslo vyjádřené výrazem

$$\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3^2\varepsilon_3 + \ldots + 3^n\varepsilon_{n+1},$$

kde ε_λ je buď -1, neb 0 aneb $+1$. Je-li $\varepsilon_1 = 0$ neb $= 1$, tu ihned vysvítá, že je ε_1 zbytek, který obdržíme, dělíme-li N třemi; je-li $\varepsilon_1 = -1$, pak spojme -1 s jedním číslem 3, z nichž se následující členové skládají a máme 2 co zbytek divise $N:3$; jelikož ale $\frac{2}{3} = \frac{3-1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ jest i zde ε_1 t. j. -1 číselně nejmenším (arci záporným) zbytkem divise $N:3$.

Nyní je patrna správnost tohoto pravidla: Dané číslo N dělme třemi; budiž Q_1 podíl a litera ε_2 číselně nejmenší zbytek (± 1, 0) této divise. Číslo Q_1 dělme též třemi a označme literou Q_2 podíl a literou ε_2 číselně nejmenší zbytek. Číslo Q_2 dělme třemi a mějme Q_3 za podíl a ε_3 za číselně nejmenší zbytek atd. Pak máme

$$N = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3^2\varepsilon_3 + \ldots$$

Operace musí se ukončiti, poněvadž kladná celistvá čísla $Q_1, Q_2 \ldots$ klesají a tedy nutně jedno z nich se musí konečně vyskytnouti, které jest menší než 3, tedy 1 neb 2. Označme toto číslo Q_n, i máme pak z rovnic

$$\begin{aligned} N &= 3Q_1 + \varepsilon_1, \\ Q_1 &= 3Q_2 + \varepsilon_2, \\ Q_2 &= 3Q_3 + \varepsilon_3, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

dosazením

$$N = 3^n Q_n + 3^{n-1}\varepsilon_n + 3^{n-2}\varepsilon_{n-1} + \ldots + 3\varepsilon_2 + \varepsilon_1.$$

Bylo-li $Q_n = 1$, tu patrně

$$N = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + \ldots + 3^{n-1}\varepsilon_n + 3_n;$$

bylo-li $Q_n = 2 = 3 - 1$, tu

$$N = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + \ldots + 3^{n-1}\varepsilon_n - 3_n + 3^{n+1},$$

čímž věta dokázána; neboť dosavadní úvahy ukazují zároveň, že je nutno bráti za $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ ony zbytky, že tedy lze každé kladné celistvé číslo jen jedním spůsobem do onoho tvaru vpraviti.

Totéž platí o každém záporném celistvém číslu, jak snadno vysvítá, uvážíme-li, že $\pm 1, 0$ záporně vzaty jsou opět $\mp 1, 0$.

Na př. $N = 777$; zde máme tyto divise

$777:3 = 259$, tedy $Q_1 = 259$, $\varepsilon_1 = 0$;
$259:3 + 86 + \frac{1}{3}$, tedy $Q_2 = 86$, $\varepsilon_2 = 1$;
$86:3 = 28 + \frac{2}{3} = 29 - \frac{1}{3}$, tedy $Q_3 = 29$, $\varepsilon_3 = -1$;
$29:3 = 9 + \frac{2}{3} = 10 - \frac{1}{3}$, tedy $Q_4 = 10$, $\varepsilon_4 = -1$;
$10:3 = 3 + \frac{1}{3}$, tedy $Q_5 = 3$, $\varepsilon_5 = 1$;
$3:3 = 1$, tedy $Q_6 = 1$, $\varepsilon_6 = 0$.

Čímž

$$777 = 3 - 3^2 - 3^3 + 3^4 + 3^6.$$

Řešení úlohy 16.

Jde o výraz

$$N = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}, \qquad (1)$$

v němž μ a ν mají některou z hodnot 1, 2, 3,... Má tedy $\mu + \nu$ některou z hodnot 2, 3, 4, 5,... a tudíž nabývá napsaný zlomek resp. hodnoty

$$0, 1, 3, 6, 10, 15, 21,.. \qquad (2)$$

tvořící arithmetickou řadu 2. stupně, jejíž obecný člen jest $\frac{n(n-1)}{2}$, kde $n = \mu + \nu - 1 = 1, 2, 3...$

Poněvadž μ jest aspoň 1, jest N větší než-li onen člen $\frac{n(n-1)}{2}$ řady (2), při kterémž $n = \mu + \nu - 1$. Abychom tedy vpravili dané číslo N do tvaru (1), nalezněme nejdříve v řadě N ono číslo $\frac{n(n-1)}{2}$, jež jest menší než N ale N nejblížší.

Pak nadbytek čísla N nad toto číslo řady může nanejvýš rovnati se tomu, oč je následující číslo řady větší než vytknuté, t. j. může nanejvýš obnášeti

$$\frac{(n-1)n - n(n-1)}{2} = n.$$

Položím-li tedy $\mu + \nu - 1 = n$, mohu vždy za μ onen nadbytek voliti, t. j. μ tak voliti, aby N bylo v napsaném tvaru (1), neboť zbude pak na ν ještě

$$\nu = n + 1 - \mu,$$

tedy najisto aspoň jednotka (když totiž μ má největší hodnotu, to jest n).

Zároveň patrno, že nelze jiným spůsobem N vpraviti do tvaru (1); neboť v případu opačném, bychom musili za dodatek μ ku zlomku $\frac{n(n-1)}{2}$ voliti číslo větší než n a pak by na ν nic nezbylo.

Budiž na př.

$$N = 19;\ 15 = \frac{6.5}{2},\ \text{tedy } n = 6.$$

Přídavek

$\mu = 19 - 15 = 4$; $n = 6 = \mu + \nu - 1$ tedy $\nu = 6 - \mu + 1 = 3$, a skutečně

$$19 = 4 + \frac{(7-1)(7-2)}{2}.$$

Buď na př.

$$N = 21;\ 15 = \frac{6.5}{2} \text{ tedy opět } n = 6.$$

Přídavek

$\mu = 21 - 15 = 6$; $n = 6 = \mu + \nu - 1$, tedy $\nu = 6 - \mu + 1 = 1$, a skutečně

$$21 = 6 + \frac{(7-1)(7-2)}{2}.$$

Dr. K.

Poznámka redakce. Téhož výsledku dojdeme i následující úvahou, která snad nebude zcela od místa.

Supponujme, že celistvé kladné číslo N jest položeno do tvaru

$$N = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2},$$

kde μ a ν značí též celistvá kladná čísla. Tedy

$$2N = (\mu + \nu)^2 - (\mu + \nu) - 2(\nu - 1.)$$

Položme

$$\mu + \nu = x;\ \nu - 1 = y.$$

Jelikož μ a ν jsou vzaty z řady čísel 1, 2, 3,... jest x jedno z čísel 2, 3, 4,.. a y jedno z čísel 0, 1, 2,.. Zároveň vychází z rovnosti

$$x = \mu + y + 1,\ \text{že } x > y + 1.$$

Nyní máme

$$2N = x(x-1) - 2y,$$

čili

$$2N + 2y = x(x-1). \qquad (1)$$

Klademe-li za x posloupně 2, 3, 4,.. obdržíme za výraz $x(x-1)$ resp. hodnoty

$$2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42,\ 56,\ 72,.. \qquad (2)$$

tvořící arithmetickou řadu 2. stupně. Jde nyní o to, vyhověti poslední rovnici takovými celistvými čísly x, y, že $x > y + 1$.

Máme-li na př. $N = 31$, $2N = 62$, tu jest v napsané řadě *číslo nejblíže větší* 72 t. j. $9(9-1)$. Položíme tedy $2N + 10 = 9(9-1)$ t. j. $y = 5$, $x = 9$, z čehož $\nu = 6$, $\mu = 3$. Touto cestou obdržíme vždy dva celistvá čísla x, y hovící rovnici (1); aby ale z nich vyplývající $\nu = y + 1$, $\mu = x - (y + 1)$ byla *kladná* čísla, nutno by $x > y + 1$, a že tomu při odvozeném řešení tak, nyní ukážeme.

Je-li 2N jedno z čísel řady (1) na př. $x(x-1)$, béřeme $y = 0$, a tedy jest tu $x > y + 1$.

Není-li ale 2N žádným číslem z řady (2) a je-li $x(x-1)$ člen této řady nejblíže větší než 2N, pak bude y vyhovující rovnici $2N + 2y = x(x-1)$ tehdy největší, kdy 2N jest jen o dvě jednotky větší než číslo v řadě předcházející t. j. kdy

$$2N = (x-1)(x-2) + 2.$$

Pak ale

$$2y = x(x-1) - 2N = 2x - 4,$$

t. j.

$$x = y + 2,$$

pročež

$$x > y + 1.$$

Jde nyní ještě o to, ukázati, že nalezené řešení jest jediné. Z rovnice

$$2N + 2y = x(x-1).$$

jest patrno, že nemůže existovati řešení daného problemu s menším x.

Buď x, y jakékoli řešení rovnice (2) — tedy může ale nemusí býti řešením problemu *). Položivše

$$2N + 2y_1 = x_1(x_1 - 1),$$

a

$$x_1 = x + 1,$$

máme subtrakcí

$$2(y_1 - y) = x(x+1) - x(x-1) = 2x,$$

tedy

$$y_1 = x + y = x_1 + y - 1,$$

*) t. j. o x, y může platiti $x > y + 1$, ale nemusí.

z čehož

$$x_1 = y_1 - y + 1.$$

Nerovnost

$$x_1 > y_1 + 1,$$

t. j.

$$y_1 + 1 - y > y_1 + 1,$$

není možnou při hodnotách, jež připouštíme. Tudíž řešení x_1, y_1 není řešením problému. Z toho ale přesně soudíme, že mimo vytknuté řešení problému neexistuje žádné jiné, čímž věta dokázána.

Řešení úlohy 17.

Nanesme od počátku pravoúhlých souřadnic na osu x délky 1, 2, 3,.. $(a-1)$, na osu y délky 1, 2,.. $(b-1)$ a veďme koncovými body rovnoběžky s osou y resp. s osou x. Pak udává patrně každý z napsaných součtů počet průsečíků těchto přímek zapadajících do prvního kvadrantu ellipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

a proto jsou si oba součty rovny.

Řešení úlohy 18.

Položme, jak v úloze se žádá,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \mathrm{R}^2,$$

kdež $c = \alpha a + \beta b$ a R značí racionálnou funkci hodnot a, b.

Odstranivše jmenovatele máme, píšeme-li x, y místo a, b

$$(\alpha x + \beta y)^2 (x^2 + y^2) + x^2 y^2 = x^2 y^2 (\alpha x + \beta y)^2 \mathrm{R}^2,$$

aneb dělivše y^4

$$\left(\alpha \frac{x}{y} + \beta\right)^2 \left(\frac{x}{y} + 1\right) + \frac{x^2}{y^2} = x^2 \left(\alpha \frac{x}{y} + \beta\right)^2 \mathrm{R}^2.$$

Z toho patrno, že celá levá strana musí býti úplným čtvercem výrazu kvadratického v $\frac{x}{y}$. Při $\frac{x}{y} = t$ jest levá strana

$$\alpha^2 t^4 + 2\alpha\beta t^3 + (\alpha^2 + \beta^2 + 1) t^2 + 2\alpha\beta t + \beta^2. \qquad (1)$$

Supponujme, že se rovná čtverci výrazu $pt^2 + qt + r$, že tedy se rovná

$$p^2t^4 + 2pqt^3 + (q^2 + 2pr)t^2 + 2qrt + r^2.$$

To vyžaduje, aby platilo těchto pět rovnic

$$p^2 = \alpha^2; \quad 2pq = 2\alpha\beta; \quad q^2 + 2pr = \alpha^2 + \beta^2 + 1; \quad 2qr = 2\alpha\beta;$$
$$r^2 = \beta^2.$$

Eliminací hodnot p, q, r lze odvoditi dvě relace mezi α, β t. j. stanoviti α, β.

Z druhé a čtvrté plyne

$$q = \frac{\alpha\beta}{q}; \quad r = \frac{\alpha\beta}{q},$$

čímž zbývající tři rovnice nabývají tvaru

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{p^2} = \alpha^2; \quad q^2 + 2\frac{\alpha^2\beta^2}{q^2} = \alpha^2 + \beta^2 + 1; \quad \frac{\alpha^2\beta^2}{q^2} = \beta^2,$$

t. j.

$$\beta^2 = q^2; \quad \beta^2 + 2\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 1; \quad \alpha^2 = q^2.$$

Máme tedy

$$\alpha^2 = \beta^2; \quad 3\alpha^2 = 2\alpha^2 + 1,$$

t. j.

$$\alpha^2 = \beta^2 = 1,$$
$$\alpha = \pm 1, \quad \beta = \pm 1.$$

Při $z = \pm x \pm y$ jet tedy $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$ čtvercem racionálné funkce $R(x, y)$. Ustanovme ještě tuto funkci.

Zvolivše za α jednu z hodnot ± 1, za β taktéž, položme $\alpha\beta = \varepsilon$, kdež tedy ε značí ± 1. Dále $q^2 = 1$, tedy $q = \varepsilon'$, kdež ε' též značí jednu z hodnot ± 1. Pak máme

$$n = r = \frac{\alpha\beta}{q} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

Výraz (1) zní nyní

$$t^4 + 2\varepsilon t^3 + 3t^2 + 2\varepsilon t + 1,$$

a jest skutečně čtvercem výrazu

$$pt^2 + qt + r,$$

t. j. rovná se

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}t^2 + \varepsilon' t + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^2,$$

t. j. rovná se

$$(\varepsilon t^2 + t + \varepsilon)^2.$$

Máme tedy

$$(\varepsilon t^2 + t + \varepsilon)^2 = (\alpha t + \beta)^2 x^2 R^2,$$

z čehož

$$R = \pm \frac{\varepsilon t^2 + t + \varepsilon}{x(\alpha t + \beta)} = \pm \frac{\varepsilon x^2 + xy + \varepsilon y^2}{xy\,(\alpha x + \beta y)}.$$

Úloha 22.

Zřídíme-li nad větší podstavou kom. kužele rovně vysoký válec, bude o $D = 26\, dm^3$ větší, zřídíme-li jej nad menší podstavou, bude o $d = 22\, dm^3$ menší než kužel tento.

Jak veliký jest krychlový obsah K_1 a K_2 prvního i druhého válce i obsah K kom. kužele? Prof. *Vavř. Jelínek.*

Úloha 23.

Jak velký jest krychlový obsah k skrojku z přímého kužele o krychlovém obsahu $K = 1350\, cm^3$, je-li nejdelší stranou jeho pláště strana $s = 27\, cm$ celého kužele a nejkratší $s' = 12\, cm$?

Týž.

Úloha 24.

Jak velký jest povrch p koule vepsané do přímého kužele komolého o plášti $S = 18{\cdot}8\, dm^2$, je-li povrch koule kolem kužele opsané $P = 56{\cdot}4\, dm^2$.

Úloha 25.

Jsou-li ze tří po sobě jdoucích čísel první a třetí čísla kmenná, jest prostřední dělitelno šesti. Dr. *K.*

Úloha 26.

Je-li *ab* dvouciferné číslo (ciframi a, b napsané) a *cd* číslo dvakrát tak velké, jež předpokládáme co dvouciferní, pak jest číslo čtyrciferní *abcd* dělitelno 17, a číslo *cdab* je dělitelno 67. Dr. *K.*

Úloha 27.

Číslo $p(p^{12}-1)$ jest při libovolném p dělitelno 2730.

Dr. *K.*

Uloha 28.

Dány jsou dvě paraboly o společném vrcholu a kolmých osách. Máme

1. stanoviti geometrické místo bodů, v nichž se protíná tečna jedné paraboly v pravém úhlu s tečnou druhé paraboly;
2. stanoviti body, jimiž k parabolám vedené tečny jsou po dvou k sobě kolmy;
3. odvoditi rovnici reálné tečny oběma parabolám společné.

Journal des math. élém.

Úloha 29.

Na str. 174. t. roč. v 1. odst. §. 10. Základů arithmetiky od p. L. Krause, zůstaven důkaz věty, že z $A+B=A+C$ plyne $A=C$, čtenáři. Nechť se podá tento důkaz.

Věstník literární.

Spisy redakci zaslané.

Zobrazování tečen a středů křivosti křivek na základě nové methody. Sepsal Frant. *Machovec*, professor při české vyšší realce Karlínské. Se 84 obrazci na 8 tab. V Praze 1883. Nákladem jednoty českých mathematiků. Cena pro členy Jednoty 1 zl. 50 kr., v knihkupectvích 2 zl.

Neváháme hned předem tvrditi, že nový spis tento plnou měrou toho jest hoden, aby vzbudil pozornost našich geometrů, zejména deskriptiviků. Základní myšlénka osnovy páně spisovatelovy, úlohy geometrie rovinné řešiti prostředkem geometrie prostorové, není ovšem nová, ale methoda jeho jest, zvláště pokud se týče části II. a III., zcela původní, a podává výsledky místy překvapující.

Konstruktivné čáry pomocné, jichž užívá se ku strojení jednotlivých bodů křivky, uvádí p. spis. v souvislosť s určitými útvary prostorovými, a vyvozuje z ní pro všecky důležitější křivky jednoduché konstrukce tečen a středů křivosti, neužívaje ani křivky dané, jíž nezobrazuje, nýbrž toliko zákona a prvků, jimiž je křivka dána.