Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

R. M.

Arithmetické úvahy a cvičení

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 2, 91--99

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121345`

Arithmetické úvahy a cvičení.

Žákům středních škol napsal **M. R.**

1. V předmluvě ku své arithmetice*) vytýká pan *G. Oltramare*, čím se různí arithmetika s algebrou takto: „Algebra se různí s arithmetikou podstatně v tom, že v algebře nezavádíme zvláštní číselné soustavy ku vyjadřování čísel, nýbrž že nám tu stačí, naznačovati je literami; pak se arci arithmetické operace nemohou skutečně konati, nýbrž nutno je jen naznačovati znaky k tomu cíli zvlášť utvořenými; tím se redukuje algebraický počet na počet čistě formálný, nezávislý na číselné soustavě.

Nyní snadno pochopíme, že

1° *řešiti arithmeticky daný úkol* znamená tolik, co dosíci výsledku hovícího onomu úkolu tím, že naznačujeme řadu úvah, které nás vedly k řešení, tak že lze, dán-li obdobný úkol, ale jinými čísly, touže cestou výsledku se dodělati;

2° *řešiti daný úkol algebraicky* znamená tolik, co vytknouti výsledek pomocí daných hodnot obecně vyznačených a pomocí oněch znaků, jež nám naznačují jednotlivé operace (výkony), které nutno provésti."

Vytkněme co příklad ku řešení arithmetickému tento úkol vyňatý ze sbírky úloh z algebry od pp. *Hromádka* a *Strnada*, str. 91 č. 42. „Společnost devadesáti osob skládá se z mužů, žen a dětí. Mužů jest čtyrykrát tolik co žen, dětí pak o deset více než dospělých. Kolik jest mužů, žen a dětí?"

Dejme tomu, že by bylo 10 žen; pak by bylo 40 mužů a 60 dětí, celkem 110 osob. Počítáme-li o jednu ženu méně, ubydou mužům 4 osoby a dětem 5, celkem ubyde tím 10 osob. Abysme ze 110ti osob přišli na 90, musíme tedy vzíti o 2 ženy méně, t. j. společnost se skládá z 8 žen, 32 mužů a 50 dětí.

Tamže na str. 111. jest úkol č. 28: „Zahradník chce jistý počet stromů nasázeti do řad. Dá-li 80 stromů do jedné řady, zbývá mu jich 18, dá-li však 85 do řady, nedostává se mu 12 stromů. Kolik stromů měl a do kolika řad chtěl je rozsaditi?"

---

*) Leçons de calcul, Arithmétique, Calcul numérique, par *G. Oltramare*, professeur à l'Académie de Genève. 1872.

Přidá-li do každé řady 5 stromů, přidá tím celkem 18 + 12 stromů; je tedy 6 řad a 80 . 6 + 18 t. j. 498 stromů.

Aby objasnil povahu arithmetického řešení, uvádí autor citovaného díla v předmluvě tyto úkoly:

První úkol. „Nechť se ustanoví číslo, jehož polovice násobena čtvrtkou podává za součin ono číslo.“

Jest patrné, že číslo 8 vyhovuje dané podmínce; avšak řekneme-li, že 8 řeší úkol, tím ještě neřešíme úkol arithmeticky, neboť tím nepodáváme úvahy, jež nás k tomuto řešení vedou, pročež z takového řešení také nevychází, kterak lze řešiti obdobný úkol formulovaný jinými čísly. Hlavní příčina, pro kterou správný výsledek, nalezený náhodou aneb pokusy více neb méně pracnými, nemůžeme pokládati za řešení daného úkolu jest ta, že tu nevíme, zda-li nalezené řešení jest jediným, aneb zda-li neexistují ještě jiná. To skutečně má místa v uvedeném úkolu, neboť tak jako číslo 8 i číslo 0 vyhovuje podmínce, a kterak tvrditi, že není žádných jiných řešení více?

Druhý úkol. „Máme nádobu, do níž se vejde osm litrů, naplněnou tekutinou; chceme odlíti 4 litry a to pomocí dvou jiných nádob, z nichž jedna jest pěti, druhá tří litrová. Kterak učiniti, abychom do pětilitrové nádoby vpravili čtyry litry?“

Označíme-li nádoby literami A, B, C, tu připojený obrazec jasně ukazuje, kterak nutno si počínati, abychom se dodělali žádaného výsledku:

	A	B	C
původní stav	8	0	0
1. operace	3	5	0
2. „	3	2	3
3. „	6	2	0
4. „	6	0	2
5. „	1	5	2
6. „	1	4	3, výsledek.

Výsledku toho se dodělal autor pokusy, t. j. nezná přesných úvah vedoucích k výsledku, a proto nedovede všecky obdobné úkoly řešiti; pročež dané řešení nelze pokládati za arithmetické řešení. Ano autor připomíná, že nelze ani rozhodnouti, je-li obdobný úkol řešitelný čili nic, tvrdě, že na př. nelze poznati *a priori* nemožnost provedení následujícího úkolu.

Třetí úkol. „Máme nádobu dvanáctilitrovou naplněnou tekutinou; tato se má rozděliti na tři stejné díly pomocí dvou nádob, z nichž jedna jest sedmi-, druhá pětilitrová, tak aby se v každé nádobě pak nalézaly čtyry litry. Kterak to lze provésti?"

Nemožnost řešení tohoto úkolu lze však přece *a priori* poznati a sice následující jednoduchou úvahou. Přihlížíme-li k úloze první, tedy poznáváme, že operace, jimiž k hledanému výsledku máme dojíti, záležejí v tom, že buď nějakou prázdnou neb z části plnou nádobu naplníme, nebo že nějakou nádobu vyprázdníme, aneb konečně se stane obojí. Z toho důvodu se musí po každé operaci vyskytnouti aspoň jedna plná neb jedna prázdná nádoba. V úkolu třetím se žádá, aby v každé nádobě na konci byly čtyry litry, a tu by nebyla žádná ani plná ani prázdná, pročež provedení nemožné.

Lze úkol vždy řešiti, vyhovuje-li žádaný stav vytknuté podmínce? — — — —

„Často se stává, že můžeme naznačiti posloupné úvahy a výkony početní, jimiž se pomocí daných hodnot doděláme hodnot žádaných, a že přece nemůžeme výsledek tohoto řešení naznačiti algebraickými znaky, t. j. že *jisté úkoly lze řešiti cestou arithmetickou, ne však algebraickou.*

Dejme tomu, že na př. *máme stanoviti největší společný dělitel dvou daných čísel.* Každý ví, kterak tu nutno s danými čísly počítati, abychom nalezli největší jich společný dělitel, t. j. každý zná arithmetické řešení; značíme-li však tato čísla a, b, tu za nynějšího stavu vědy nedovedeme vyjádřiti výsledek literami a, b a znaky, jimiž vyjadřujeme arithmetické operace.

Tato okolnost, která se ostatně často vyskytuje a jejíž příčinu na tomto místě vyhledávati nechceme, ukazuje superioritu pochodu arithmetického v jistých otázkách; tak se stává, že některé úkoly náležející do algebry nelze řešiti než arithmeticky, t. j. že je nelze řešiti obecně, nýbrž jen tehdy, když dáta jsou číselná.

Připomínáme, že se většina autorů béře cestou algebraickou i v otázkách ryze arithmetických. Na př. obecné odmocňování náleží k počtům ryze arithmetickým a přece můžeme konstatovati, že se tu početní návod obyčejně odvozuje z algebry; nemůžeme jinak, než se opříti tomuto konání, velmi nepřístojnému. Skutečně, přihlížíme-li třeba jen k tomuto jedinému příkladu, a tážeme-li se, kam ona methoda vedla, musíme se vyznati, že ten úkol úplně se neřeší, byť i vzata algebra na pomoc; cesta ta vedla ku stanovení druhé a třetí odmocniny, k vyšším odmocninám však nevede, poněvadž by vyžadovala hlubší znalost algebry, a nepodán tu žádný návod k stanovení libovolných odmocnin. Zanecháme-li však operace algebraické, nalezneme ihned obecný návod ku stanovení odmocnin — o čemž dále pojednáme.

Nemůžeme dosti odporučiti začátečníkům, aby se cvičili v řešení arithmetických úloh nepoužívajíce úkonů algebraických, které arci také vedou k cíli, kterými se však necvičí mysl ve vyhledávání oněch nesčíslných obratů, t. j. ve věci nad míru prospěšné. Dán-li úkol, tu se nám nemá jednati jen o dosažení jeho řešení, nýbrž máme především bystřiti mysl, máme se učiti rozumování, vyhledávání okolností, jež ukazují, kterak dojíti cíle, máme se učiti, jak lze obejíti obtíž spíše než ji násilím odstraniti, což by se obyčejně mohlo učiniti pomocí algebry.

Často se stává, že daný úkol nemá řešení a k této nemožnosti řešiti úkol mohou poukazovati různé věci, které uvésti nebude na škodu.

Tato nemožnost může za prvé tím býti spůsobena, že nelze daná čísla tak kombinovati, abychom došli k žádoucímu výsledku, čehož příkladem jest úkol třetí prvé vytknutý; v tomto případu nemá daný úkol žádného řešení.

Za druhé může onu nemožnost řešení spůsobiti povaha operac, jež jest nám prováděti s danými čísly; tak na př. by ss mohlo státi, že bychom, chtějíce úkol řešiti, byli přinuceni odčítati číslo nějaké od čísla menšího; v tomto případu nemá úkol řešení v tom smyslu, jak byl položen.

Za třetí se může vyskytnouti nemožnost řešení tím, že výsledek nelze vpraviti do té formy, v níž se má podati; z tohoto důvodu nelze na př. jisté obecné zlomky vyjádřiti co zlomky desetinné*), aneb odmocninu čísla ve tvaru obecného

*) Vyskytnou-li se totiž zlomky periodické, nezakončené.

zlomku, není-li odmocněnec přesně příslušnou mocností. Nemožnost řešení zde zaviňuje spůsob, jakým hodnoty vyjadřujeme, hledaná hodnota tu existuje, nelze ji však vpraviti do žádaného tvaru.

Za čtvrté může nemožnost řešení vězeti v tom, že by řešení vyžadovalo nekonečně mnoho počtářských operací, ač lze výsledek přesně udati. Mějme na př. *stanoviti součet zlomků* $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ *jichž počet jest nekonečný a z nichž každý následující jest třikrát menší než předcházející.* Ač tento úkol má řešení, přece je nelze nalézti cestou arithmetickou, poněvadž idea nekonečna v počtu sčítanců nám nedovoluje, abychom podrobili tyto zlomky obyčejným pravidlům, jež mají podati hodnotu jich součtu. Můžeme říci, že kdykoli se tato okolnost ukáže v nějaké úloze, to obyčejně v tom vězí, že se vyskytuje mezi operacemi, jež nutno provésti, nějaká operace různá s šesti operacemi, kterým říkáme arithmetické.

Někdy však jest počet vyžadovaných operací, aniž by byl nekonečný, přece tak značný, že nelze dojíti přímo výsledku. *Nechť jde na př. o zbytek, který se vyskytne, dělíme-li číslo 2 násobené 1000000krát samo sebou číslem 29.* Hledaný zbytek jest číslo menší než 29, o jehož existenci nelze pochybovati, avšak počet, jenž by k němu přímo vedl, byl by tak dlouhý, že nelze na jeho provedení ani pomysliti; v tomto případu může nám znalost vlastností čísel k výsledku vydatně pomáhati.“

2. *Odmocňováním* cestou ryze arithmetickou podává autor (v 6. kapitole) příklad arithmetického řešení ve smyslu vytčeném toho úkolu, stanoviti odmocninu libovolného stupně daného čísla.

„*Počněme s druhou odmocninou.* Přihlédneme-li k druhým mocnostem čísel 1, 10, 100. . . . nalezneme ihned, že druhá odmocnina libovolného čísla má tolik cifer, kolik se vyskytne v něm oddílů, béřeme-li, vycházejíce od jednotek a postupujíce na levo, do každého oddílu dvě cifry; poslední oddíl arci může býti i jednocifrový.

Kořen sebou násoben dá odmocněnce; pročež tento dělen kořenem dá opět kořen co podíl. Dělíme-li odmocněnce $\left\{\begin{matrix}\text{menším}\\ \text{větším}\end{matrix}\right\}$ číslem než je kořen, obdržíme podíl $\left\{\begin{matrix}\text{větší}\\ \text{menší}\end{matrix}\right\}$ než kořen; bude tedy kořen vždy mezi dělitelem a podílem. Arithmetický průměr těchto dvou čísel bude bližší kořenu, než ono číslo, které se od kořene v stejném smyslu odchyluje. Vezmeme-li tento průměr místo kořene, jest chyba menší než rozdíl mezi dělitelem a dělencem.

Arithmetickým průměrem dělíme zase odmocněnce, a vezmeme opět průměr z dělitele a dělence atd. atd. Stanovme ku př. druhou odmocninu čísla 78349510. Rozdělivše číslo na dvouciferní oddíly, máme čtyry oddělení a nejvyšší jest 78, tedy obsahuje odmocnina 8 tisíc; poněvadž však $9 . 9 = 81$ jest blíže číslu 78 než $8 . 8 = 64$, zvolíme za odmocninu přibližně 9000. Dělením daného čísla devíti tisíci, nalezneme podíl 8705, nedbáme-li než celých. Arithmetický průměr z dělitele a podílu jest 8852. Dělíme-li tímto číslem dané číslo, vyjde 8851,05 . . . Jest tedy 8851 hledaná odmocnina a chyba jest menší než jedna celá t. j. 8851 udává přesně celé v hledané odmocnině.

Co druhý příklad vyčísleme druhou odmocninu z 10 přesně na mnoho desetinných míst. — Dělitel 3 dá podíl 3,33*), jest tedy arithmetický střed 3,16. Dělitel 3,16 dá podíl 3,161455, tedy arithmetický průměr 3,16227. Dělitel 3,16227 dá podíl 3,16228532033 a tedy průměr 3.16227766016, což vzato za kořen, dává chybu menší než 0,00001. Dělitel 3,16227766016 dá podíl 3,16227766017675866399778 a tedy průměr

$$3{,}16227766016837933199889;$$

tento repraesentuje hledanou odmocninu s chybou menší než $\frac{1}{10^{11}}$.

Zvolivše poslední hodnotu za dělitele, obdržíme podíl 3,16227766016837933199889 7, pročež toto číslo jest hledanou odmocninou $\sqrt{10}$ až na chybu menší než $\frac{1}{10^{23}}$.

Přistupme ku stanovení odmocnin stupňů vyšších. Známe-li třetí, čtvrtou, pátou atd. odmocninu daného čísla a dělíme-li známou odmocninou toto číslo, obdržíme patrně druhou, třetí, čtvrtou atd. mocnost kořene; dělíme-li — neznajíce kořen — číslem menším neb větším, obdržíme podíl větší resp. menší

*) Obmezujeme se vždy na napsaná desetinná místa.

než ony mocnosti. Bude se tedy kořen nalézati mezi dělitelem a resp. druhou, třetí, čtvrtou atd. odmocninou podílu.

Jest-li že — chtějíce ustanoviti tuto druhou, třetí, čtvrtou odmocninu podílu — dělíme podíl opět dřívějším dělitelem, můžeme o děliteli a novém podílu právě tak souditi, jako o děliteli a podílu při první divisi, a tudíž jde nyní o vyčíslení první, druhé, třetí atd. odmocniny posledního podílu.

Jestliže takto pokračujeme t. j. jestliže dělíme nalezený podíl vždy týmž dělitelem, obdržíme při dané třetí mocnině po dvou divisích, při dané čtvrté mocnině po třech divisích atd. podílu, jenž podává přesně třetí, čtvrtou atd. odmocninu daného čísla, je-li dělitel přesným kořenem; není-li jím však, jsa větším neb menším, tu vyjde konečný podíl menší, resp. větší než hledaný kořen, a sice tím menší neb větší, čím jest dělitel větší neb menší kořene. Bude tudíž kořen nutně mezi dělitelem a mezi posledním podílem.

Arithmetický průměr dělitelův a posledního podílu bude přibližnou hodnotou kořene, jemu bližší, než ono z uvedených čísel, jež se odchyluje od pravé hodnoty kořene v témž směru jako průměr.

Avšak dle úvah o druhé odmocnině učiněných tíhne tento arithmetický střed ku druhé odmocnině předposledního podílu, který je tím větší neb menší, čím je dělitel menší neb větší kořene, a proto onen střed bude resp. tím větší neb menší; pročež obdržíme přibližnější hodnotu kořene, vezmeme-li arithmetický průměr mezi dvěma posledními děliteli a mezi posledním podílem.

Avšak tento průměr tíhne ke třetí odmocnině předpředposledního podílu, jež jest tím větší neb menší, čím jest dělitel menší neb větší kořene, pročež i průměr resp. bude tím větší neb menší: pročež obdržíme ještě přesnější hodnotu hledaného kořene, vyčíslíme-li arithmetický průměr z tří posledních dělitelů a z posledního podílu.

Obdobně soudíme dále a shledáváme, že obdržíme touto cestou nejpřibliženější hodnotu hledaného kořene, vypočteme-li arithmetický průměr ze všech dělitelů a z posledního podílu. S touto přibližnou hodnotou naložíme jako s prvním dělitelem a obdržíme novou sbliženější hodnotu atd. atd.

Místo abychom dělili dané číslo dělitelem, podíl zase dělitelem, podíl zase dělitelem atd., obdržíme ihned poslední podíl, dělíme-li dané číslo onou mocností dělitele, jež se rovná stupni hledané odmocniny zmenšenému o jednu.

Tím také přímo vychází, že se přesná hodnota kořene nalézá mezi dělitelem a posledním podílem, čímž lze posouditi jak přesně se nalezené hodnoty hledanému číslu blíží.

Abychom při stanovení třetí odmocniny již prvního dělitele dosti výhodně zvolili, oddělíme dané číslo od pravé k levé na oddíly tříciferní a ustanovíme ono celistvé číslo, jehož třetí mocnost se nejvyššímu oddílu nejvíce blíží; k číslu takto stanovenému přidáme tolik null, kolik oddílu ještě zbývá a máme prvního dělitele. Při čtvrté odmocnině béřeme oddíly čtyřciferní, neboť $10^4 = 10000$, $100^4 = 100000000$, atd., a zároveň tu nutné míti před rukama čtvrté mocnosti čísel od 1 do 9, totiž

$$1^4 = 1,\quad 2^4 = 16,\quad 3^4 = 81,\quad 4^4 = 256,\quad 5^4 = 625,\quad 6^4 = 1296,$$
$$7^4 = 2401,\quad 8^4 = 4096,\quad 9^4 = 6561.$$

Cifra, jejížto čtvrtá mocnost se nejvíce blíží poslednímu oddílu, vzata s tolika přivěšenými nullami, kolik oddílů ještě zbývá, bude nám pak prvním dělitelem. A obdobně při odmocnině páté, šesté atd.

Co příklad vezměme vyčíslení třetí odmocniny čísla 24137569. Oddělivše máme 24 | 137 | 569. Hodnota 2^3 je 8, 3^3 je 27 a to se blíží více číslu 24; nechť tedy je 300 prvním dělitelem. Dělíme-li dané číslo čtvercem tohoto dělitele t. j. 90000, obdržíme podíl 268 zanedbavše desetinná místa. Arithmetický průměr čísel 300, 300, 268 jest 289.

Dělitelem 289 dělíme dané číslo a obdržíme přesně podíl 83521 a ten opět dělen 289ᵗᵘ dá podíl 289; jest tedy 289 hledaná třetí odmocnina."

Co další příklad stanoví autor čtvrtou odmocninu čísla 582622237229761. Oddělivše od pravé k levé vždy po čtyrech cifrách, máme

582 | 6222 | 3722 | 9761.

Hledaná odmocnina bude tedy čtyrciferní číslo počínající cifrou 4, neboť $4^4 = 256$, kdežto 5^4 již $= 625$. Avšak 582 je bližší poslednější hodnotě, pročež zvolíme 5000 za prvního dělitele. Místo abychom za sebou tímto dělitelem třikrát dělili, dělme jeho třetí mocností to jest 125000000000; tím obdržíme podíl 4660, nedbáme-li desetiných zlomků. Arithmetický průměr mezi třikráte 5000 a mezi 4660 jest 4915.

Dělitel 4915 má třetí mocnosť 118732760875 a tou dělivše dané číslo nalezneme podíl 4907, nedbajíce než celých. Arithmetický střed mezi třikráte 4915 a mezi 4907 jest 4913 a ten se může odchylovati od hledané mocniny jen o méně než o 8. Dělivše dané číslo třetí mocninou čísla 4913 obdržíme přesně podíl 4913, jest tedy toto číslo hledanou čtvrtou odmocninou.

Co poslední příklad uveďme s autorem stanovení sedmé odmocniny čísla 78365023689 a sice až na jednu stotisícinu.

Oddělivše máme

7836 | 5023689.

Hledaná odmocnina jest tedy číslo dvouciferní a jelikož 7836 jest mezi 3^7 a 4^7, vezmeme třeba 40 za prvního dělitele. Tu nalezneme dělivše vždy podíl zase 40[ti], že jest šestý podíl 16; arithmetický střed mezi šestkrát 40 a 16 jest 36.

Dělitel 36 dá při šesté divisi podíl 36,0003948 a arithmetický průměr mezi šesteronásobným dělitelem a podílem jest 36,0000564.

Vezmeme-li 36,00005 za dělitele, nalezneme šestý podíl, jenž se od tohoto dělitele liší o méně než o 0,00001, jest tedy 36,00005 hledaná sedmá odmocnina přesně stanovena až na jednu stotisícinu. (Pokračování.)

Poznámka k vzorci hypsometrickému.

Podává

Vl. Švejcar.

Jednou z vad hypsometrického vzorce jest, že předpokládá touž teplotu pro celý vzduchový sloupec, jehož výšku měří, kdežto se teplota mění nepřetržitě. Ku zcela přesnému vzorci musili bychom znáti zákon, jakým se teplota vzduchu do výše mění, poněvadž ale ten znám není, musíme se spokojiti s nějakým zákonem předpokládaným. Předpokládejme tedy, že teploty ubývá s výškou úměrně, což dle pozorování dobře se