Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička
O Leibnicově poslední úloze z neurčité analytiky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 3, 97--101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121335

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1889

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O Leibnicově poslední úloze z neurčité analytiky.

Pro žáky středních škol napsal

prof. Dr. **F. J. Studnička.**

Koncem XVII. a začátkem XVIII. století pěstovala se mathematika velmi hojně též tím spůsobem, že kladeny veřejně zvláštní otázky nesnadných method vyžadující, jichž řešení pak opět cestou veřejnou rozšiřováno. Abychom vynikající příklad aspoň jeden uvedli, poukazujeme k úkolům isoperimetrickým, z nichž se během času vyvinul počet *variační*,*) a k vědeckému sborníku „Acta Eruditorum“ v Lipště od r. 1682 vydávanému, v němž mnoho takových úloh dáno i řešeno.

I slavný *Leibnic* pěstoval pilně tohoto druhu korrespondenci vědeckou, jakož zvláště dokazuje *„Leibnitii J. G. et Bernoullii Commercium philosophicum et mathematicum“* (Lausanae et Genevae 1745). O jednotlivostech pak se dočítáme i ve spisu *Wydra* „Historia matheseos in Bohemia et Moravia cultae“ (Pragae 1778), kdež na str. 57. uvedeno: „Problema posthumum a Cl. Viro Leibnitzio an. 1716 paulo ante mortem suam commissum solutioni R. P. Augustini Thomae a S. Josepho. Est vero aequatione sequenti comprehensum: $bx+1=y^2$, in qua b est numerus datus quiscunque possibilis integer, x et y quaesiti hac lege, ut y semper maneat minor quam b. Petitur ejus solutio in integris toties, quoties fieri potest.“

Aniž bychom pátrali po tom, jak provedl tehdejší professor mathematiky na universitě Pražské, Moravan *Augustinus Thomas a S. Josepho,* řešení této neurčité rovnice stupně druhého, jež v Gaussově rouše má tvar jednoduchý

$$y^2 \equiv 1 \pmod b,$$

*) Viz Studnička „O počtu variačním“ Praha, 1872, pag. 7.

hodláme jiným, a to elementárním spůsobem podati všeobecné její řešení.

Přidržíme-li se původního tvaru

$$bx + 1 = y^2, \tag{1}$$

poznáme, že jí vyhověno bude hodnotou

$$x = bk^2 + \alpha k + \beta, \tag{2}$$

kdež k jest libovolné číslo celistvé, α, β pak jest takové hodnoty, že

$$bx + 1 = b^2k^2 + \alpha bk + b\beta + 1 = (bk + \gamma)^2,$$

značí-li γ nové číslo dosud neznámé, takže pak vyplyne

$$y = \pm (bk + \gamma). \tag{3}$$

Jelikož z rovnice (1) pomocí těchto hodnot jde na jevo, že nutno, aby

$$b^2k^2 + \alpha bk + b\beta + 1 = b^2k^2 + 2\,b\gamma k + \gamma^2,$$

poznáváme, že při libovolné hodnotě veličiny k platí

$$\alpha = 2\,\gamma,$$
$$b\beta + 1 = \gamma^2,$$

z čehož pak dále plyne

$$\gamma = \frac{\alpha}{2},$$
$$b\beta + 1 = \frac{\alpha^2}{4},$$

takže nutno voliti β tak, aby α^2 bylo čtvercem *sudého* čísla.

Tomuto požadavku vyhoví se, jestli

a) $\beta = 0$, tedy $\alpha = \pm 2$,

načež jest podle vzorce (2)

$$x = bk^2 \pm 2\,k \tag{4}$$

a podle vzorce (3)

$$b) \qquad \begin{aligned} y &= \pm(bk \pm 1); \\ \beta &= b^{2n-1} \pm 2\,b^{n-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

kdež n značí libovolné celistvé číslo positivní, takže pak jest

$$\alpha = \pm 2\,(b^n \pm 1),$$

a tedy podle vzorce (2)

$$x = bk^2 \pm 2\,(b^n \pm 1)\,k + b^{2n-1} \pm 2\,b^{n-1}, \tag{6}$$

a podobně podle vzorce (3)

$$y = \pm(bk \pm [b^n \pm 1]). \tag{7}$$

Z tohoto řešení plyne pak pro

$$n = 1$$

řešení jednodušší

$$x = bk^2 \pm 2\,(b \pm 1)\,k + b \pm 2, \tag{8}$$
$$y = \pm(bk \pm [b \pm 1]). \tag{9}$$

Zároveň tu patrno, že vzorec (4) a (5) poskytuje pro

$$k = 1$$

stojné hodnoty, jako vzorec (8) a (9) pro

$$k = 0;$$

taktéž tu poznáváme nejjednodušší řešení předložené rovnice (1), jež měl *Leibnic* na zřeteli, totiž

$$\begin{aligned} x &= 0, & x &= b \pm 2, \\ y &= \pm 1, & y &= \pm(b \pm 1). \end{aligned}$$

Jak ze vzorců (4) a (5), jakož i (6) a (7) jde na jevo, obdrží se všeobecně dvě soustavy hodnot pro x a y, z nichž poslednější jsou dvojznačné, klademe-li v těchto vzorcích za k postupně čísla řady přirozené

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Máme-li na zřeteli vzorce (4) a (5), jest tu differencí řady čísel pro x platné

$$\Delta_x = 2bk + b \pm 2, \tag{10}$$

kdežto pro řadu čísel y vyjadřující jest

$$\Delta_y = b; \tag{11}$$

pro následující soustavu vzorců platí pak

$$\Delta_x = 2bk \pm 2(b^n \pm 1) + b, \tag{12}$$
$$\Delta_y = b, \tag{13}$$

a tedy pro soustavu poslední, zvolíme-li svrchní znamení,

$$\Delta_x = 2bk + 3b \pm 2, \tag{14}$$
$$\Delta_y = b, \tag{15}$$

kdežto pro znamení spodní vyjde

$$\Delta_x = 2bk - b \pm 2. \tag{16}$$

Znajíce tedy jedno řešení některé soustavy, zjednáme si pomocí příslušných differencí celou jich řadu.

Jestli na př. řešiti rovnici

$$5x + 1 = y^2,$$

obdržíme pro spodní znamení ze vzorců (4) a (5)

x	3	16	39	72	...
y	4	9	14	19	...

a podobně pro znamení svrchní

x	0	7	24	51	88	...
y	1	6	11	16	21	...

V prvním případě jest

$$\Delta_x = 10k + 3, \quad \Delta_y = 5,$$

kdežto v druhém platí

$$\Delta_x = 10k + 7, \quad \Delta_y = 5.$$

Spojíme-li konečně obě soustavy hodnot, obdržíme

x	0	3	7	16	24	39	51	72	88	...
y	1	4	6	9	11	14	16	19	21	...

a tu řadu rozdílovou

$$\begin{array}{lllllllll} \text{pro } x\colon & 3, & 4.1, & 3.3, & 4.2, & 3.5, & 4.3, & 3.7, & 4.4, \ldots \\ \text{„ } y\colon & 3, & 2, & 3, & 2, & 3, & 2, & 3, & 2, \ldots \end{array}$$

Jak patrno, poskytuje jednoduchý úkol tento, s nímž se slavný *Leibnic* před svou smrtí zanášel, dosti zajímavých podrobností, takže i o sobě zasluhuje bližšího povšimnutí.

Pozdní mrazy a předvídání mrazů nočních vůbec.

Napsal

Dr. Stan. Kostlivý,

adjunkt c. k. ústředního ústavu meteorologického ve Vídni.

Když z jara příroda k novému se životu probudila a rostlin dosud jen něžně vyvinutých před mrazy tu i tam se vyskytujícími chrániti třeba, tu hospodář s obavou úzkostlivě pohlíží na teploměr, zvláště pak tehdy, když v kalendáři nachází, že měsíc stojí v úplňku.

Jakož vůbec pověra velice dosud je rozšířena, že měsíc na povětrnost naši vliv veliký jeví, takže s každou změnou měsíce obrat v povětrnosti se očekává, tak hlavně mrazy pozdní, v dubnu a v květnu se dostavující, účinku jeho se připisují.*)

Však vidíme tu, že i mínění přímo sobě odporující příčinu mrazů těch vysvětlovati mají. Kdežto jedni měsíci moc připisují, že zářením tepla mraky rozhání neb pohlcuje a tím oblohu jasnou způsobuje, praví jiní, že měsíc „zimu“ vyzařuje. Tak na př. vypočetl *Šofka*, že teplota měsíce obnáší — 142°; „měsíc náš úplně prý je ztuhlou ledovou koulí, na níž i vzduch ztuhlý v hmotu pevnou.... jasně bílá pole, jež pozorujeme, jsou prý pole sněhová, leč sníh není jak náš, nýbrž povstat musil ze ztuhlých plynů.... — neb co jiného by se z atmosféry jeho bylo stalo? ....Vlastně vytvořuje měsíc stále zimu, my ale

---

*) Již astrologie udávala, že ráz povětrnosti, když měsíc „k vládě“ se dostal, bude studeno a vlhko, největší moci měl v „Býku“ (tak zvaný „Stierneu“), pak v „Raku“.