Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Hoza

# Kombinatorický důkaz poučky o násobení dvou determinantů

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 6 (1877), No. 2, 87--89

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121332

# Kombinatorický důkaz poučky o násobení dvou determinantů.

Podává

prof. **F. Hoza.**

Násobíme-li spolu dva determinanty $n$-tého stupně

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

a

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix},$$

obdržíme za součin opět determinant $n$-tého stupně

$$\varDelta'' = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix},$$

v němž

$$c_{pq} = a_{p1}\, b_{q1} + a_{p2}\, b_{q2} + a_{p3}\, b_{q3} + \dots + a_{pn}\, b_{qn}\,.$$

Abychom tuto větu dokázali, pišme

$$\varDelta'' = \begin{vmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{12} + \dots + a_{1n}\, b_{1n}, & \dots & a_{11}\, b_{n1} + a_{12}\, b_{n2} + \dots + a_{1n}\, b_{nn} \\ a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{12} + \dots + a_{2n}\, b_{1n}, & \dots & a_{21}\, b_{n1} + a_{22}\, b_{n2} + \dots + a_{2n}\, b_{nn} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}\, b_{11} + a_{n2}\, b_{12} + \dots + a_{nn}\, b_{1n}, & \dots & a_{n1}\, b_{n1} + a_{n2}\, b_{n2} + \dots + a_{nn}\, b_{nn} \end{vmatrix},$$

Tento determinant obsahuje $n$ sloupců, z nichž každý složen z $n$ částečných sloupců. Rozložíme-li tento složený determinant na determinanty jednoduché tím spůsobem, že z každého sloupce velkého vezmeme jenom jeden sloupec částečný a to libovolný, obdržíme jednoduché determinanty tvaru

$$\varDelta_k = \begin{vmatrix} a_{1k_1}\, b_{1k_1} & a_{1k_2}\, b_{2k_2} & a_{1k_3}\, b_{3k_3} & \dots & a_{1k_n}\, b_{nk_n} \\ a_{2k_1}\, b_{1k_1} & a_{2k_2}\, b_{2k_2} & a_{2k_3}\, b_{3k_3} & \dots & a_{2k_n}\, b_{nk_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{nk_1}\, b_{nk_1} & a_{nk_2}\, b_{nk_2} & a_{nk_3}\, b_{3k_3} & \dots & a_{nk_n}\, b_{nk_n} \end{vmatrix}$$

až tudíž bude

$$\Delta'' = \Sigma\, \Delta_k .$$

Patrně lze z každého sloupce determinantu $\Delta_k$ vyzvednouti společného činitele, čímž obdržíme

$$\Delta_k = b_{1k_1}\, b_{2k_2}\, b_{3k_3} \ldots . b_{nk_n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \ldots . & a_{1k_n} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \ldots . & a_{2k_n} \\ . & . & . & . \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \ldots . & a_{nk_n} \end{vmatrix}$$

aneb

$$\Delta_k = b_{1k_1}\, b_{2k_2}\, b_{3k_3} \ldots . b_{nk_n} . \begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} & a_{k_3} & \ldots . & a_{k_n} \\ 1 & 2 & 3 & \ldots . & n \end{vmatrix} .$$

Přípony $k_1\ k_2\ k_3 \ldots .\ k_n$ nejsou nic jiného, než variace z prvků

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots .\ n$$

do $n$-té třídy s libovolným opakováním všech prvků. Těchto variac bude množství $n^n$ a tudíž se bude determinant $\Delta''$ skládati z $n^n$ determinantů tvarů $\Delta_k$ .

Mezi všemi variacemi nalezáme předně takové, v nichž se žádný prvek neopakuje. To jsou nápotom prosté permutace a množství jejich jest $n!$. Součet všech $\Delta_k$, jež takým činem utvoříme, bude

$$\Delta'_k = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \ldots . & b_n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots . & n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots . & a_n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots . & n \end{vmatrix}$$

čili

$$\Delta'_k = \Delta . \Delta' .$$

Ostatní variace $k_1\ k_2\ k_3 \ldots .\ k_n$ budou takové, v nichž budou aspoň dva stejné prvky, t. j.

$$k_l = k_m .$$

Každé takové variaci odpovídá determinant

$$\Delta_k^{(lm)} = b_{1k_1}\, b_{2k_2} \ldots b_{lk_l} \ldots b_{mk_m} \ldots b_{nk_n} \begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} & \ldots a_{k_l} & \ldots a_{k_m} & \ldots a_{k_n} \\ 1 & 2 & \ldots l & \ldots m & \ldots n \end{vmatrix}$$

a součet všech podobných bude

$$\Delta_k'' = \Sigma\, \Delta_k^{(lm)} ,$$

načež

$$\Delta'' = \Delta'_k + \Delta_k'' .$$

V determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} \dots a_{k_l} \dots a_{k_m} \dots a_{k_n} \\ 1 & 2 \quad \dots l \quad \dots m \quad \dots n \end{vmatrix}$$

přichází mezi jinými následující sloupce

$$\begin{vmatrix} \dots\dots a_{1k_l} \dots\dots a_{1k_m} \dots\dots \\ \dots\dots a_{2k_l} \dots\dots a_{2k_m} \dots\dots \\ \dots\dots a_{3k_l} \dots\dots a_{3k_m} \dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots a_{nk_l} \dots\dots a_{nk_m} \dots\dots \end{vmatrix}.$$

Jelikož jsou tyto dva sloupce stejné, musí

$$\begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} \dots a_{k_l} \dots a_{k_m} \dots a_{k_n} \\ 1 & 2 \quad \dots l \quad \dots m \quad \dots n \end{vmatrix} = 0$$

a tudíž

$$\varDelta_k^{(lm)} = 0,$$

pročež i

$$\varDelta_k'' = 0$$

a tedy

$$\varDelta'' = \varDelta_k' = \varDelta \,.\, \varDelta',$$

což bylo nám dokázati.*)

---

# Kterak lze vyšetřiti obsah kruhu?

Podává

**M. Pelnář.**

Vyšetřme nejprvé obsah čtvrti kruhu $ABC$. (Obr. si sestroj!) K tomu cíli rozdělme poloměr $AC$ na $n$ stejných dílů a veďme dělícími body rovnoběžky s poloměrem $BC$. Dále sestrojme vždy mezi dvěma rovnoběžkami po sobě jdoucími obdélník kruhu opsaný a do kruhu vepsaný.

---

*) Viz o témž předmětu: *Studnička* „O determinantech", Praha, 1870, pag. 35., kde tentýž rozbor s determinantem stupně třetího jest proveden, neb *Salmon-Fiedler,* Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen, Leipzig 1863, pag 15. *Günther* Lehrbuch der Determinantentheorie, Erlangen 1875 pag. 61.