Počátkové nauky o determinantech.

Pro žáky středních škol

píše

Dr. F. J. Studnička.

V předcházejícím ročníku tohoto časopisu vyložil jsem stručně, jak se novověká nauka o determinantech během posledních dvou století — od r. 1693 až do dnešního dne — rozvíjela a zdokonalovala a rozšiřovala. Zároveň jsem poukázal k tomu, jak nyní se nauka tato stala nanejvýš důležitou nejen pro vyšší studium mathematické, nýbrž i pro střední školy, čehož nejlepším důkazem jest uvádění jejích základů do školních knih, jakž na př. *Davidov*[1]) v Rusku, *Baltzer*[2]) v Němcích učinil, aneb prohlášení jich za předmět zkoušky maturitní, jakž v *Bavorsku*[3]) a *Dánsku*[4]) se stalo. A v skutku uznává se čím dále tím více i od těch, kdož považují již nynější program učení mathematického na školách našich za příliš rozsáhlý a studentstvo přetěžující, že nebude na dlouho lze nevšímati si nauky tak všestranně prospěšné, jako jest právě theorie determinantů již v nejjednodušších základech svých; odtud pochází i tolik pokusů učiniti tuto nauku, či vlastně nejpotřebnější poučky její co možná přístupnými i obyčejně jen skrovně připravenému žáku středních škol.[5])

Poněvadž mathematické vyučování na gymnasiích a reálkách našich na rovni stojí s cizím a i u nás se zde onde determi-

---

[1]) НАЧАЛЬНАЯ АЛГЕБРА, 1868.

[2]) Die Elemente der Mathematik, 1872.

[3]) *Hesse* „Die Determinanten elementar behandelt.“ 1871.

[4]) *Zeuthen* „Den analytiske Geometries Begyndelsesgrunde.“ 1867.

[5]) Jmenujeme tu jen *Studnička* „O determinantech“ 1870. *Dölp* „Die Determinanten“ 1874, *Meiling* „Over de determinanten, 1865. *Diekmann* „Einleitung in die Lehre von den Determinanten“ 1876. *Mansion* „Introduction à la théorie des Determinants“ 1876. *Trudi* „Teoria dei determinanti e loro applicazioni“ 1860.

nantům věnuje zvláštní pozornost, ač naše školní knihy o nich se nezmiňují: bude snad mnohým čtenářům těchto listů vítaným elementární úvod do nauky o determinantech, jaký by asi co zvláštní odstavec do našich knih algebraických se hodil a to za statě jednající o sestavách a přestavách, jež tu nutno znáti.

A poněvadž tato příprava není všude stejně přiměřeným spůsobem vyložena a podlé potřeb determinantních upravena, budiž zároveň co úvod předesláno, kolik nutno věděti o těchto formálních úkonech, zanášejících se se skládáním prvků v skupiny podlé určitých pravidel.

Úvod.

§. 1.

O skupinách vůbec a převratech zvlášť.

V nauce o skupinách není podstatou číslo a jeho vlastnost, nýbrž veličina jakákoli co celkový předmět, pokud se liší od jiných; a tu se jedná o to z n předmětů, jež nazýváme též *prvky* neb *elementy* a označujeme buď nestejnými písmenami

$$a, b, c, \ldots, n$$

aneb při stejné písmeně nestejnými příponami

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

kdež pro krátkost možná i znak a vynechati a jen číslice

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

napsati, sestaviti rozmanité *skupiny* neb *komplexy* a určiti, kolik jich v kterém případě vyvésti možná. Při tom hledíme tedy na seřadění těchto prvků neb na pořádek, v jakém po sobě se kladou.

Podlé počtu prvků, které se v jednotlivých skupinách vyskytují, rozeznáváme skupiny *třídy* první, druhé, třetí, ..., $n$té; podlé pravidla, jímž se při skládání řídíme, rozeznáváme *druhy* skupin a sice *nástavy (variace)*, *přestavy (permutace)* a *sestavy* (*kombinace*), při čemž ještě pak vytknouti sluší, zda-li tentýž prvek v jedné skupině vícekráte se smí objeviti čili nic.

K rozličným účelům prospěšno jest rozeznávati při spojení dvou prvků dva možné rozličné případy, jestli totiž následující prvek vyšším neb nižším, při čemž poloha písmeny v abecedě neb přípony v přirozené řadě čísel rozhoduje, takže na př.

prvek c sluje vyšší nežli b neb a, prvek 7 vyšší nežli 6, 5, 4, ..., 1, 0. V případě prvním jest spojení *přímé* neb *řádné,* v opačném pak *nepřímé* neb *převrácené* aneb obsahuje *převrat* (inversi, dérangement).

Podlé toho jest na př. spojení cf, 35 přímé,
„ fc, 53 převrácené.

Spojíme-li v nějaké skupině každý prvek s následujícími a vyšetříme-li tudíž *počet* převratů v ní obsažených, poznáme, jakého jest *rázu*, *přímého-li* majíc *sudý* počet, *nepřímého-li,* majíc *lichý* počet převratů; jelikož obsahuje na př.

skupina $a\ c\ e\ b\ d$ převraty tři, jest nepřímá,
„ 3 1 4 5 2 „ čtyři, jest přímá.

Při tom platí pravidlo, že se *počet převratů změní o 1, vyměníme-li za sebe prvky sousední* neb stojící vedlé sebe, a že se tudíž *změní počet převratů o číslo liché, vyměníme-li kterékoli dva prvky za sebe.*

Neb je-li původní skupina dvou sousedních prvků řádnou, nastane záměnou jich převrat; je-li však původně převrácenou, zruší se záměnou tento převrat. V obou případech bude tedy rozdíl v počtu převratů značen jednotkou, jelikož se počet tento původní buď zvětší neb zmenší o 1.

Ležíli pak mezi dvěma prvky a_i a a_j, jež mají býti zaměněny, jiných prvků k, zamění se napřed

a_i za a_{i+1}, čímž vznikne změna 1,
pak a_i „ a_{i+2}, „ „ „ 1,
„ a_i „ a_{i+3}, „ „ „ 1,
. . . .
„ a_i „ a_{i+k}, „ „ „ 1,
konečně a_i „ a_j, „ „ „ 1,
čímž povstane dohromady změn $k+1$;

nyní stojí a_j na místě a_{i+k}, a_{i+k} na místě a_{i+k-1} a t. d. a nutno tudíž zaměniti opačným směrem v novém pořádku

a_j za a_{i+k}, čímž vznikne změna 1,
pak a_j „ a_{i+k-1}, „ „ „ 1,
. . . .
„ a_j „ a_{i+2}, „ „ „ 1,
konečně a_j „ a_{i+1}, „ „ „ 1,
čímž povstane dohromady změn v počtu k,

což s předcházejícím počtem změn činí *lichý* počet $2k+1$, jak pravidlem bylo vysloveno.

Přeložíme-li na př. v skupině řádné

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

prvek 3 na místo 7, povstane skupina

1, 2, 7, 4, 5, 6, 1,

která čítá 7 převratů, při čemž pochod tento naznačuje schema

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
4, 3,
5, 3,
6, 3,
7, 3,
7, 6,
7, 5,
7, 4.

Vymění-li se v skupině m-té třídy prvky do kola neb *cyklicky*, takže druhý přijde na místo první, třetí na druhé, . . . , poslední na místo předposlední a první na poslední, provede se $m-1$ záměna prvků sousedních a počet převratů změní se tudíž *o sudý* počet, je-li skupina třídy *liché* a naopak. Z toho plyne dále, že *cyklickou záměnou všech prvků nějaké skupiny obdrž se skupina* $\left\{\begin{matrix}\textit{stejného}\\ \textit{opačného}\end{matrix}\right\}$ *rázu, je-li počet prvků* $\left\{\begin{matrix}\textit{lichý,}\\ \textit{sudý}\end{matrix}\right\}$; neb je-li skupina třídy sudé, změní se cyklickou záměnou počet převratů o počet lichý a bude tudíž $\left\{\begin{matrix}\text{lichým}\\ \text{sudým}\end{matrix}\right\}$, byl-li původně $\left\{\begin{matrix}\text{sudým}\\ \text{lichým}\end{matrix}\right\}$ a je-li skupina třídy liché, změní se počet převratů o číslo sudé a bude tudíž $\left\{\begin{matrix}\text{sudým}\\ \text{lichým}\end{matrix}\right\}$, byl-li původně $\left\{\begin{matrix}\text{sudým}\\ \text{lichým}\end{matrix}\right\}$.

Při skládání skupin platí konečně všeobecné pravidlo, aby se počalo se skupinou nemající převratů, postupovalo od menšího jich počtu k většímu a končilo skupinou čítající jich počet co možná největší, ana povstává převrácením skupiny první; považujeme-li tudíž skupinu za číslo, nutno přecházeti od skupiny k skupině tak, aby následující měla větší hodnotu číselnou nežli předcházející.

§. 2.

O nástavách neb variacích.

Skládáme-li ze zásoby n prvků čítající všechny možné skupiny po m prvcích, majíce zřetel nejen k nestejnosti jich vůbec, nýbrž i k nestejnému jich postavení ve skupině, nastavujeme neb skládáme *nástavy* neb *variace* (arrangement); při tom musí patrně $n > m$.

Chceme-li na př. z prvků a, b, c složiti nástavy po dvou, obdržíme

$$\begin{array}{c|c|c} a\,b & a\,c & b\,c \\ b\,a & c\,a & c\,b\,. \end{array}$$

Značí-li symbol A_n^k počet nástav z n prvků složených po k prvcích neb třídy k-té, bude A_n^{k+1} značiti počet nástav třídy $(k+1)$ní; a jelikož každá skupina k té třídy neobsahuje členů $(n-k)$, možná každou tuto nástavu spojiti s jedním z těchto $(n-k)$ vybývajících prvků, aby se dostaly skupiny třídy $(k+1)$-ní, takže tu platí všeobecně

$$A_n^{k+1} = (n-k)\,A_n^k, \tag{1}$$

při čemž patrně skupin po 1 prvku neb třídy první jest n a tudíž platí

$$A_n^1 = n. \tag{2}$$

Zavedeme-li pak do vzorce (1) za k po sobě 1, 2, 3, ..., $m-1$, obdržíme

$$\begin{aligned} A_n^2 &= (n-1)\,A_n^1 \\ A_n^3 &= (n-2)\,A_n^2 \\ &\dots\dots\dots \\ A_n^{m-1} &= (n-\overline{m-2})\,A_n^{m-2} \\ A_n^m &= (n-\overline{m-1})\,A_n^{m-1}, \end{aligned}$$

z čehož jde znásobíme-li na obou stranách a použijeme-li vzorce (2),

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-\overline{m-1}) \tag{3}$$

aneb v symbolickém označení

$$A_n^m = \binom{n}{m} m! = \frac{n!}{(n-m)!}\,. \tag{4}$$

§. 3.

O nástavách s opakováním.

Skládáme-li z n prvků skupiny po m prvcích neb m-té třídy tak, že jednotlivé prvky též opakujeme, nastavujeme opakujíce prvky neb skládáme *nástavy* čili *variace s opakováním;* při tom může býti patrně i $n < m$.

Chceme-li na př. z prvků a, b, c složiti nástavy s opakováním třídy druhé, obdržíme jich 9 a sice

$$\begin{array}{c|c|c} a\,a & b\,a & c\,a \\ a\,b & b\,b & c\,b \\ a\,c & b\,c & c\,c\,; \end{array}$$

chceme-li naopak z prvků a, b složiti nástavy s opakováním třídy třetí, obdržíme jich 8 a sice

$$\begin{array}{c|c|c|c} a\,a\,a & a\,b\,a & b\,a\,a & b\,b\,a \\ a\,a\,b & a\,b\,b & b\,a\,b & b\,b\,b \end{array}$$

Značí-li pro n prvků symbol V_n^k počet nástav s opakováním třídy k-té, bude jich, přidá-li se ku každé z těchto nástav každý z n prvků, patrně n-kráte tolik, takže tu platí všeobecně

$$V_n^{k+1} = n\, V_n^k, \tag{5}$$

při čemž, jak zřejmo, skupin třídy první jest n, tedy

$$V_n^1 = n. \tag{6}$$

Zavedeme-li pak do vzorce (5) opět za k po sobě 1, 2, 3, ..., $m-1$, obdržíme

$$\begin{aligned} V_n^2 &= n\, V_n^1 \\ V_n^3 &= n\, V_n^2 \\ &\ldots\ldots \\ V_n^{m-1} &= n\, V_n^{m-2} \\ V_n^m &= n\, V_n^{m-1}, \end{aligned}$$

a učiníme-li na obou stranách součin a použijeme-li vzorce (6), konečně

$$V_n^m = n^m. \tag{7}$$

§. 4.

O přestavách neb permutacích.

Obsahují-li nástavy prvky všechny, slují *přestavy* neb *permutace*; tu platí tedy $n = m$ a tudíž $V_n^n = P_n$.

Z prvků a, b, c možná na př. složiti přestavy

$$\begin{array}{c|c|c} a\,b\,c & b\,a\,c & c\,a\,b \\ a\,c\,b & b\,c\,a & c\,b\,a\,. \end{array}$$

Značí-li symbol P_n počet přestav (třídy n-té) a položíme-li ve vzorci (3) a (4) $m = n$, obdržíme bezprostředně

$$P_n = n(n-1)\,(n-2)\ldots 2\,.\,1 = n! \tag{8}$$

Ostatně možná vzorec tento i neodvisle vyvinouti. Jestli totiž P_k počet přestav třídy k-té, tož patrno, že bude jich počet $(k+1)$-krát větší, připojíme-li 1 prvek, jelikož v skupině čítající k prvků může nový prvek zaujmouti $(k+1)$ rozličné místo, jako na př. v skupině tří prvků

$$_d a_d\, b_d\, c_d$$

může d zaujmouti čtvero postavení rozličných; i bude tudíž

$$P_{k+1} = (k+1)\, P_k\,, \qquad (9)$$

při čemž zároveň platí, jak bezprostředně patrno,

$$P_1 = 1\,. \qquad (10)$$

Zavedeme-li tedy do vzorce (9) za k postupně $1, 2, 3, \ldots, n-1$, obdržíme

$$\begin{aligned} P_2 &= 2\, P_1 \\ P_3 &= 3\, P_2 \\ &\;\;\ldots\ldots \\ P_n &= n\, P_{n-1}\,; \end{aligned}$$

znásobíme-li pak na obou stranách a zkrátíme-li, majíce zřetel ke vzorci (10), zjednáme si vzorec (8) neb

$$P_n = 1\,.\,2\,.\,3 \ldots n = n!$$

Jestli mezi n prvky m stejných, z nichž tedy přestavováním nevznikají různé přestavy, bude obsahovati počet všech přestav P_n tolikrát stejné přestavy, kolik jich možná složiti z počtu m stejných prvků, totiž P_m-krát, takže tu bude, zavedeme-li k označení různých přestav symbol P_n^m,

$$P_m\,.\,P_n^m = n!$$

aneb použijeme-li vzorce (8),

$$P_n^m = \frac{n!}{m!}\,.$$

A když stejných prvků jest jedněch a, druhých b, třetích $c, \ldots$, posledních m, takže

$$a + b + c + \ldots + m = n\,,$$

bude všeobecně

$$P_n^{a,\,b,\,c,\ldots,\,m} = \frac{P_n}{P_a P_b P_c \ldots P_m} = \frac{n!}{a!\, b!\, c! \ldots m!} \qquad (11)$$

Poznámka. Přestavy jsou dvojí podlé toho, obsahují-li *sudý* neb *lichý* počet převratů neb inversí; jedněch jest vždy tolik co druhých a sice $\frac{1}{2} n!$ Neb každé přestavě první polovice odpovídá přestava v druhé polovici, u níž dva sousední prvky jsou zaměněny a tudíž má $\left\{\begin{matrix}\text{sudý}\\ \text{lichý}\end{matrix}\right\}$ počet převratů, měla-li první přestava jich počet $\left\{\begin{matrix}\text{lichý}\\ \text{sudý}\end{matrix}\right\}$.

§. 5.

O sestavách neb kombinacích.

Vyloučíme-li z nástav všechny skupiny, které mají stejné, byť i nestejně seřaděné prvky, obdržíme skupiny formálně i podstatně rozličné, jež slují *sestavy* neb *kombinace*; a tu platí taktéž podmínka $n > m$, neb třída jest nižší nežli počet prvků.

Poněvadž z každé nástavy m-té třídy povstává přestavováním prvků P_m nových nástav, bude obsahovati počet všech nástav m-té třídy P_m-krát stejné sestavy, takže tu bude

$$A_n^m = P_m C_n^m, \tag{12}$$

značí-li C_n^m počet kombinac třídy m-té; použijeme-li tedy vzorců (4) a (8), obdržíme

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{m}. \tag{13}$$

Vzorec poslední možná však i neodvisle vyvinouti.

Jmenujeme-li sestavy třídy m-té takové různé skupiny m prvků, jež možná složiti z n prvků, a chceme-li určiti počet sestav třídy k-té, uvažme, že každá skupina z počtu jich, označeného symbolem C_n^k, má prvků k a tudíž nemá ostatních $n-k$, z nichž každý se může spojiti s každou skupinou k-té třídy, aby povstaly skupiny třídy $(k+1)$-ní, takže jich počet bude vesměs

$$(n-k)\, C_n^k;$$

v tomto počtu bude však zahrnut počet podstatně rozličných skupin neb hledaných sestav $(k+1)$ třídy $(k+1)$-kráte, jelikož každý nový prvek může v řadě k prvků jiných zaujmouti $k+1$ rozličné místo, jak dříve již bylo praveno; i bude tudíž podlé toho

$$(n-k)\, C_n^k = (k+1)\, C_n^{k+1},$$

aneb obrátíme-li,

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\, C_n^k, \tag{14}$$

při čemž platí patrně

$$C_n^1 = n. \tag{15}$$

Zavedeme-li pak do vzorce (14) za k po sobě $1, 2, 3, \ldots, m-1$, obdržíme

$$\begin{aligned}
C_n^2 &= \frac{n-1}{2} C_n^1 \\
C_n^3 &= \frac{n-2}{3} C_n^2 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
C_n^{m-1} &= \frac{n - \overline{m-2}}{m-1} C_n^{m-2} \\
C_n^m &= \frac{n - \overline{m-1}}{m} C_n^{m-1}
\end{aligned}$$

a znásobíme-li na obou stranách, majíce zřetel ke vzorci (15), konečně

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{m-1})}{1.2.3 \quad \ldots \quad m} = \binom{n}{m},$$

jako prvé bylo ustanoveno.

Poznámka. Podlé obyčeje loterního slují sestavy třídy první *uniony* (estratta), druhé *amba,* třetí *terna,* čtvrté *kvaterna,* páté *kvinterna.*

§. 6.

O sestavách s opakováním.

Skládáme-li z n prvků skupiny m-té třídy, které se od sebe vesměs liší co do obsahu, byť i jednotlivé prvky vícekráte byly vedlé sebe položeny, sestavujeme prvky opakujíce neb skládáme *sestavy s opakováním*; tu patrně může býti $n < m$.

Podlé toho na př. možná z dvou prvků a, b složiti 4 sestavy třídy třetí a sice

$$a\,a\,a,\ a\,a\,b,\ a\,b\,b,\ b\,b\,b,$$

z prvků a, b, c pak 6 sestav třídy druhé a to

$$\begin{array}{c|c|c}
a\,a & b\,b & c\,c \\
a\,b & b\,c & \\
a\,c & &
\end{array}.$$

Sestav s opakováním třídy m-té jest tedy z n prvků patrně tolik, jako sestav bez opakování z $(n+m-1)$ prvku, jelikož v skupině třídy m-té může vedle prvku jednoho býti opakováním ($m-1$) stejný položen, takže tu počet prvků zdánlivě o $m-1$ se zvětšuje.

Vyjádříme-li počet sestav s opakováním třídy m-té z prvků n symbolem K_n^m, obdržíme ze vzorce (13) bezprostředně

$$K_n^m = \binom{n+m-1}{m}. \qquad (16)$$

Vzorec tento možno však i neodvisle vyvinouti.

Chceme-li míti sestavy s opakováním, uvažme, že tu obdržíme skupinu $(k+1)$-ní třídy, spojíme-li každou skupiny třídy k-té, jichž počet jest K_n^k, se všemi jednotlivými k prvky v ní se již vyskytujícími a mimo to ještě se všemi n prvky vůbec, čímž obdržíme jich počet

$$(n+k)\,K_n^k,$$

v němž však z příčin dříve již vyložených počet K_n^{k+1} jest obsažen $(k+1)$-kráte, takže tu podobně bude

$$(n+k)\,K_n^k = (k+1)\,K_n^{k+1},$$

z čehož jde obrácením

$$K_n^{k+1} = \frac{n+k}{k+1}\,K_n^k, \qquad (17)$$

při čemž platí zároveň patrně

$$K_n^1 = n. \qquad (18)$$

Zavedeme-li tedy do vzorce (17) za k po sobě 1, 2, 3, ... $m-1$, obdržíme

$$\begin{aligned}
K_n^2 &= \frac{n+1}{2}\,K_n^1\\
K_n^3 &= \frac{n+2}{3}\,K_n^2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
K_n^{m-1} &= \frac{n+m-2}{m-1}\,K_n^{m-2}\\
K_n^m &= \frac{n+m-1}{m}\,K^{m-1},
\end{aligned}$$

z čehož jde, znásobíme-li na obou stranách a přihlédneme-li ke vzorci (18), konečně

$$K_n^m = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\quad\ldots\quad m} = \binom{n+m-1}{m},$$

jak prvé bylo vzorcem (16) vyjádřeno.

(Pokračování.)