Václav Hübner

Maximální trojúhelník dané elipse vepsaný a minimální trojúhelník opsaný a naopak

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 3-4, 253--258

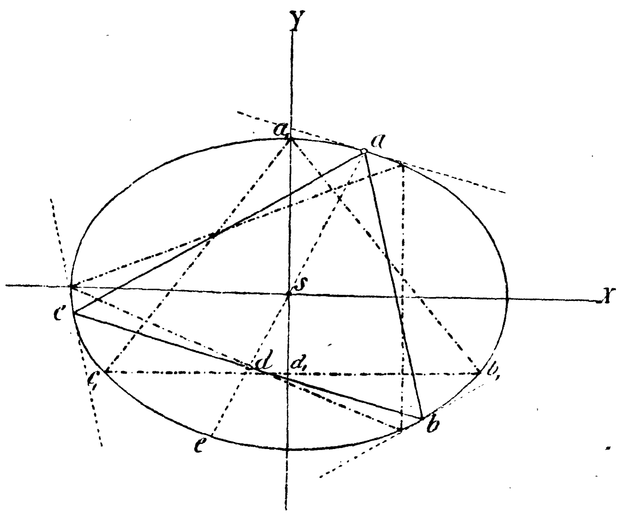
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121293`

Maximální trojúhelník dané elipse vepsaný a minimální trojúhelník opsaný a naopak.

Podává **Václav Hübner**, profesor na Král. Vinohradech.

Do dané elipsy vepsati trojúhelník největšího obsahu.

Ze všech trojúhelníků vepsaných do dané elipsy nad tětivou $\overline{bc}$ jakožto základnou má největší plochu ten, jenž má nej-



Obr. 1.

větší výšku, t. j. tečna sestrojena ve vrcholu a jest rovnoběžná s $\overline{bc}$. Tětiva bc jest pak sdružena k průměru příslušnému k bodu a $(\overline{ae})$, pročež jest jím rozpůlena (obr. 1.). Těžnice $\overline{ad}$ $\triangle abc$ prochází tudíž středem s dané elipsy. Má-li býti $\triangle$ abc největší ze všech trojúhelníků vepsaných do dané elipsy nad touž základnou $\overline{bc}$, je třeba, aby všechny tři těžnice procházely středem elipsy, t. j. těžiště trojúhelníka musí býti ve středu s, neboť za základnu $\triangle$ možno bráti též strany $\overline{ac}$, $\overline{ab}$.

K bodu a (x_1, y_1) náleží jeden takový maximální $\triangle$ abc, jehož strany jsou rovnoběžné s tečnami protějších vrcholů a jehož tři těžnice procházejí tedy středem s. Koncový bod průměru příslušného k bodu a budiž $e\ (-x_1, -y_1)$; bod d půlící úsečku $\overline{es}$ $\left[\overline{sd} = \frac{1}{3}\overline{ad} = \frac{1}{3}(\overline{as} + \overline{sd}) = \frac{1}{3}(\overline{se} + \overline{sd}), \text{ nebo } sd = \frac{\overline{se}}{2}\right]$ má tudíž souřadnice $-\frac{x_1}{2}, -\frac{y_1}{2}$ a rovnice přímky procházející body $b\ (x_2, y_2)$, $c\ (x_3, y_3)$ rovnoběžné s tečnou v bodě a jest

$$y + \frac{y_1}{2} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\left(x + \frac{x_1}{2}\right),$$

nebo

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = -\frac{a^2b^2}{2};$$

řešíme-li tuto rovnici s rovnicí elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ dle x, y, obdržíme souřadnice bodů b, c, t. j.

$$x_{2,3} = -\frac{bx_1 \pm ay_1\sqrt{3}}{2b}$$

$$y_{2,3} = -\frac{ay_1 \mp bx_1\sqrt{3}}{2a}.$$

Plocha $\triangle\ abc$ jest

$$\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}ab\sqrt{3},$$

t. j. plocha trojúhelníka jest nezávislá na poloze bodu $a\,(x_1, y_1)$.

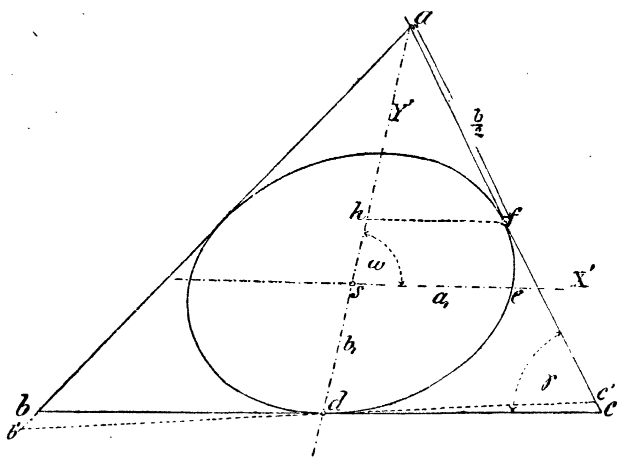
Z toho poznáváme: otáčí-li se $\triangle$ vepsaný do dané elipsy, maje své těžiště neustále ve středu elipsy, nemění se obsah jeho a jest největší ze všech vepsaných trojúhelníků. Tak je plocha $\triangle\ a_1b_1c_1 = \overline{d_1b_1}\,.\,\overline{a_1d_1}$ (obr. 1.); $\overline{d_1a_1} = \frac{b}{2} + b = \frac{3b}{2}$, souřadnice bodu b_1: $x = \overline{d_1b_1} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, ($x$ bodu b_1 určíme z rovnice elipsy; jest totiž $b^2x^2 = a^2\left(b^2 - \frac{b^2}{4}\right)$ a $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$) $y = \overline{sd_1} = -\frac{b}{2}$, tudíž $\triangle\, a_1b_1c_1 = \frac{3ab}{4}\sqrt{3}$.

Kolem daného $\triangle$ abc opsati elipsu nejmenšího obsahu. Hledaná elipsa bude ta, v níž daný $\triangle\ abc$ jest maximální.

Podle předešlé úlohy musí $a_1 b_1 = \frac{4\triangle}{3\sqrt{3}} = \frac{4\triangle\sqrt{3}}{9}$ (a_1, b_1 poloosy elipsy).

Plocha elipsy $E = \pi a_1 b_1 = \frac{4\pi\triangle\sqrt{3}}{9}$. Jsou-li strany trojúhelníka a, b sevřený úhel γ, jest $\triangle = \frac{ab}{2}$ sin γ, tudíž

$$E = \frac{2\pi\, ab \sin\gamma \sqrt{3}}{9}.$$



Obr. 2.

Dané elipse opsati nejmenší trojúhelník a naopak danému trojúhelníku vepsati největší elipsu.

Budiž $\triangle abc$ hledaná minimální poloha trojúhelníka. Strany trojúhelníka hledaného jsou tečnami dané elipsy. Změníme-li např. stranu $\overline{bc}$ o nekonečně malý úhel, povstane tečna soumezná $b'c'$ (obr. 2.); obě tečny protínají se v bodě dotyčném d a vzniknou dva trojúhelníky $bb'd$, $cc'd$. Jedním $\triangle$ se plocha zvětší, druhým zmenší a v krajní poloze tyto dva differenciální trojúhelníky musejí se plochami sobě rovnati, t. j. $\overline{bd} = \overline{dc}$ nebo strany hledaného minimálního trojúhelníka abc dotýkají se elipsy svými půlícími body.

Je totiž:

$\triangle dbb' = \frac{1}{2}\,\overline{db}\,.\,\overline{db'} \sin d,$
$\triangle dcc' = \frac{1}{2}\,\overline{dc}\,.\,\overline{dc'} \sin d,$ tudíž
$\overline{db}\,.\,\overline{db'} = \overline{dc}\,.\,\overline{dc'}$ a při soumezných polohách
jest $\overline{db} = \overline{db'}$, $\overline{dc} = \overline{dc'}$, t. j.
$\overline{db}^2 = \overline{dc}^2$ čili $\overline{db} = \overline{dc}.$

Spojnice $\overline{ad}$ jest tedy těžnice $\triangle\, abc$, ale zároveň průměr sdružený tečně bc, protože půlí tětivy rovnoběžné s bc. Z toho následuje, že se těžnice hledaného trojúhelníka protínají ve středu elipsy, těžiště $\triangle\, abc$ jest tudíž ve středu elipsy. Má-li se naopak *danému trojúhelníku vepsati největší elipsa*, musí se hledaná elipsa dotýkati stran v půlících bodech a míti střed v těžišti trojúhelníka.

Plocha $\triangle\, abc$: $\triangle = \frac{ab}{2} \sin \gamma$. Jsou-li osy souřadné (X', Y') sdružené průměry, z nichž jeden prochází vrcholem a a půlícím bodem d strany $\overline{bc}$ (obr. 2.), úhel os ω, jest pak rovnice elipsy v této soustavě

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \text{ kdež } b_1 = \tfrac{1}{3}\overline{ad} \text{ (vlastnosti těžiště } \triangle).$$

Jsou-li souřadnice bodu f na elipse $x = \overline{hf}$, $y = \overline{sh}$

$$\left(\overline{af} = \overline{fc} = \frac{b}{2}\right), \text{ jest } \overline{hf} = \frac{\overline{dc}}{2} = \frac{a}{4}\ (a = \overline{bc}),$$

$$\overline{ha} = \frac{\overline{ad}}{2} = \frac{t}{2}\,(\overline{ad} = t),\ \overline{sh} = \overline{sa} - \overline{ha} = \frac{2}{3}\,t - \frac{t}{2} = \frac{t}{6},$$

tudíž $x = \frac{a}{4}$, $y = \frac{t}{6}$. Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice elipsy, obdržíme: $\frac{a^2}{16a_1^2} + \frac{t^2}{36\,.\,\frac{t^2}{9}} = 1$, tudíž $\frac{a^2}{16a_1^2} = 1 - \frac{1}{4}$,

$$\text{neboli } a_1^2 = \frac{a^2}{12}.$$

Rovnice elipsy jest tudíž $\frac{12x^2}{a^2} + \frac{9y^2}{t^2} = 1.$

Plocha elipsy $E = \pi a_1 b_1 \sin \omega = \pi \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{t}{3} \sin \omega$

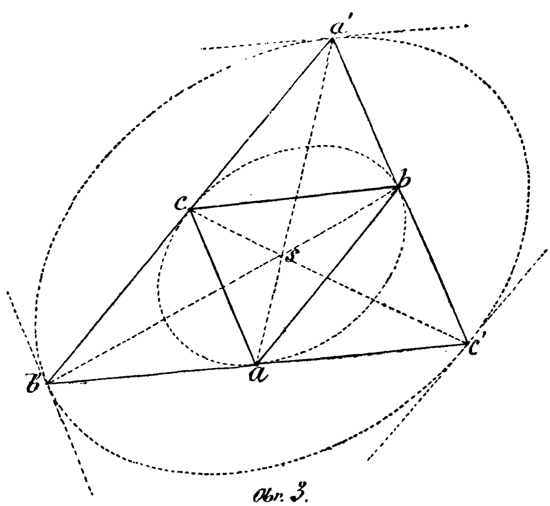
(Apolloniovy vztahy: 1), $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$, 2), $a_1 b_1 \sin \omega = ab$).

Z $\triangle dca$ plyne: $b : t = \sin \omega : \sin \gamma$, odkud $\sin \omega = \frac{b \sin \gamma}{t}$

pročež $E = \pi \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{t}{3} \cdot \frac{b \sin \gamma}{t} = \frac{\pi ab \sin \gamma}{18} \sqrt{3}$, plocha největší elipsy vepsané $\triangle abc$.

Ježto $ab \sin \gamma = 2\triangle$, tedy $E = \frac{\pi \triangle}{9} \sqrt{3}$, z čehož

$\triangle = \frac{9E}{\pi\sqrt{3}} = \frac{3E\sqrt{3}}{\pi}$, t. j. plocha nejmenšího trojúhelníka opsa-



Obr. 3.

ného elipse. Také opsaných trojúhelníků jest nekonečně mnoho a všechny mají týž obsah. Každé tečně elipse náleží jeden.

Maximální trojúhelník elipse vepsaný a minimální trojúhelník elipse opsaný jsou v následující souvislosti:

$$\triangle a'b'c' = 4\triangle abc \text{ (obr. 3.)};$$

body a', b', c' jsou na elipse podobné dle středu v poměru $1:2$; $\triangle a'b'c'$ jest této elipse vepsán a jest tudíž v ní trojúhelníkem maximálním.

Otáčí-li se opsaný trojúhelník elipse, aby jeho těžiště stále bylo ve středu elipsy, vytvořují jeho vrcholy elipsu podobnou a rovnoběžně položenou dle poměru $2:1$.

Plocha minimální elipsy opsané danému $\triangle$ jest

$$E = \tfrac{2}{9}\,\pi\, ab \sin\gamma \sqrt{3},$$

plocha maximální elipsy vepsané danému $\triangle$ jest

$$E' = \frac{\pi\, ab \sin\gamma}{18}\sqrt{3}, \text{ tudíž } E : E' = 4 : 1.$$

Je-li $a = b$ přejde elipsa v kruh; plocha vepsaného trojúhelníka maximálního $\triangle' = \frac{3a^2}{4}\sqrt{3}$ a plocha opsaného trojúhelníka minimálního $\triangle = 3a^2\sqrt{3}$. Oba trojúhelníky jsou rovnostranné.

Úvahy tyto sdělil se mnou též p. ředitel Alois Zdráhal.

Fototypie.

Napsal Dr. **Viktor Teissler** v Praze.

(Pokračování.)

V tisku užívá se nejčastěji dvou způsobů reprodukčních, které jsouce přizpůsobeny reprodukovaným originálům značně se od sebe liší. Je to reprodukce perokreseb a půltónových originálů (fotografií). *)

Prohlížíme-li na př. nějakou tušovou malbu nebo fotografii krajiny, shledáme na ní vedle čistých míst barvou téměř netknutých místa sytě zbarvená, hluboké stíny. Mezi nejvyššími světly a hlubokými stíny je spojitý ponenáhlý přechod, který zahrnujeme názvem půltónu. Půltón vzniká nestejně silnou vrstvou barvy na obraze, na př. tím, že totéž místo přejedeme několikráte štětcem. Krajinu nemusíme jenom štětcem malovati (třebas i jednobarevně), můžeme ji též nakresliti perem. V tom případě ve světlech necháváme čistý papír, kdežto v nejhlubších stínech jej úplně pokrýváme stále stejně kryjící barvou na př. sytě černou tuší. Ponenáhlých přechodů mezi světlem a stínem docilujeme nestejně hustým čárkováním toutéž barvou nebo čárkováním čarami nestejně širokými. Čáry spojité mohou býti nahrazeny čárkami přerušovanými nebo body ve stínech

---

*) O témže předmětě jedná obšírně E. Goldberg, Die Grundlagen der Reproduktionstechnik. Halle 1912.