Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

O jedné methodě pro řešení numerických rovnic algebraických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 3-4, 241--252

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121290

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O jedné methodě pro řešení numerických rovnic algebraických.

Napsal K. Petr.

V následujícím chci se zřetelem k čtenářům středoškolským vyložiti jednu methodu pro výpočet kořenů rovnic algebraických. Methoda tato nepředpokládá separaci kořenů rovnice dané, užívá prostředků zcela elementárních a dá se použiti snadno k výpočtu kořenů komplexních. Má tedy podobné výhody jako methoda Gräffeova, kteráž však při výpočtu kořenů komplexních vede často ku svízelným počtům. Nad to jest možno při provádění výpočtu orientovati se o chybě, o kterou určitá přibližná hodnota kořenu se liší od pravé hodnoty.

Naproti tomu jest ovšem počet operací početních, chceme-li s takovou rychlostí k výsledku se blížiti jako při methodě Gräffeově, značně větší, je-li stupeň rovnice dané veliký.

Methoda vyložená jest v jednom směru blízká methodě Bernoulliově.

1. Vezměme v úvahu rovnici pátého stupně (úvahy však platí obecně pro n-tý stupeň), kterou budeme psáti ve tvaru

$$x^5 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f, \tag{1}$$

a předpokládejme nejprve, že rovnice má všecky kořeny vyjma jeden takové, že jich absolutní hodnota jest menší než jedna; ten jeden mějž absolutní hodnotu větší než jedna. Z rovnice této, násobíme-li ji x a nahradíme-li x^5 na pravé straně výrazem dle (1) jemu rovným, obdržíme rovnici

$$x^6 = (b + a^2)x^4 + (c + ab)x^3 + (d + ac)x^2 + (f + ad)x + fa,$$

aneb kratšeji psáno

$$x^6 = a_6 x^4 + b_6 x^3 + c_6 x^2 + d_6 x + f_6; \quad a_6 = b + a^2, \ldots$$

Opětujeme-li tuto operaci, dostaneme rovnici

$$x^7 = a_7 x^4 + b_7 x^3 + c_7 x^2 + d_7 x + f_7$$

a tak můžeme postupovati neomezeně a dostáváme řadu rovnic tvaru

$$x^N = a_N x^4 + b_N x^3 + c_N x^2 + d_N x + f_N, \quad N > 5, \tag{2}$$

jimž všem hoví všecky kořeny rovnice (1). Avšak 4 kořeny rovnice dané jsou menší než 1, pro ně levá strana, t. j. x^N, se blíží nulle s rostoucím N a tak jest patrno,*) že pro pravou stranu lze *s velikým přiblížením* psáti při velikém N

$$a_N x^4 + b_N x^3 + c_N x^2 + d_N x + f_N = a_N (x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta), \tag{3}$$

při čemž výraz $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ položen byv rovný nulle, dává rovnici, jejíž čtyři kořeny jsou ty čtyři kořeny rovnice (1), jež jsou menší než 1. Z toho vyplývá ihned, jelikož součet kořenů rovnice (1) jest a, součet pak kořenů rovnice $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ jest $-\alpha = -\frac{b_N}{a_N}$, že pro dosti veliké N jest kořen rovnice (1), jehož absolutní hodnota jest větší než 1, přibližně rovný číslu

$$a + \frac{b_N}{a_N}. \tag{4}$$

Toto přiblížení jest tím větší, čím větší jest N, což můžeme, značíme-li kořen největší absolutní hodnoty ξ_0, psáti

$$\xi_0 = \lim_{N=\infty} \left(a + \frac{b_N}{a_N}\right). \tag{4'}$$

Podobně bychom mohli, užívajíce vět pro součin kořenů rovnice

---

*) Jest tu zároveň míti na paměti, že koefficienty a_N, b_N, ... — aspoň některé z nich — s rostoucím N rostou nade všecky meze, neboť dosadíme-li do (2) kořen, jehož absolutní hodnota jest větší než jedna, pak levá strana roste s N nade všecky meze, tedy i pravá strana.

algebraické, psáti

$$\xi_0 = \lim_{N=\infty} \frac{f a_N}{f_N}. \tag{4'}$$

Avšak lze ještě jiné výrazy získati pro ξ_0. Dělíme-li rovnici

$$x^{N+1} = a_{N+1}x^4 + b_{N+1}x^3 + c_{N+1}x^2 + d_{N+1}x + f_{N+1} \tag{2'}$$

rovnicí (2), při čemž používáme přibližné relace (3) platné ovšem i pro (2′) a při čemž zároveň dosazujeme za x hodnotu ξ_0 (kteráž splňuje obě rovnice (2) a (2′)), dostaneme *přibližně*

$$\xi_0 = \frac{a_{N+1}}{a_N} \tag{5}$$

aneb přesně

$$\xi_0 = \lim_{N=\infty} \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

a tudíž též, není-li žádné z čísel α, β, γ, δ rovno nulle,

$$\xi_0 = \lim_{N=\infty} \frac{b_{N+1}}{b_N} = \lim_{N=\infty} \frac{c_{N+1}}{c_N} = \ldots \tag{4''}$$

Rostou tedy veličiny a_N (a také veličiny b_N, c_N, ...) s rostoucím indexem *přibližně* jako členy řady geometrické, jejížto kvocient jest ξ_0, aspoň od jistého indexu počínaje.

Z rovnic (2) a (2′) vyplývá, vyloučíme-li člen s x^4, ihned

$$\begin{aligned} a_N x^{N+1} - a_{N+1}x^N &= (a_N b_{N+1} - a_{N+1}b_N)x^3 + \\ &+ (a_N c_{N+1} - a_{N+1}c_N)x^2 + \ldots \\ &= l_N x^3 + m_N x^2 + n_N x + p_N. \end{aligned} \tag{6}$$

Při tom jsou se zřetelem ku (4′) čísla $l_N = a_N b_{N+1} - a_{N+1}b_N, m_N, \ldots$ čísla malá vzhledem ku součinům $a_N b_N$, $a_N c_N$, ... Rovnici poslední můžeme též dáti tvar

$$x - \frac{a_{N+1}}{a_N} = \frac{l_N x^3 + m_N x^2 + n_N x + p_N}{a_N x^N} \tag{7}$$

aneb též

$$x = \frac{a_{N+1}}{a_N} + \frac{l_N x^3 + m_N x^2 + n_N x + p_N}{a_N(a_N x^4 + b_N x^3 + c_N x^2 + d_N x + f_N)}. \tag{7'}$$

Tato rovnice platná pro $x = \xi_0$ (a vůbec pro každý kořen rovnice dané (1), se kterou se v podstatě shoduje) dovoluje nám odhadnouti chybu, o kterou se liší přibližná hodnota (5) od hodnoty ξ_0, druhý člen v (7') resp. pravá strana v (7) dávají nám pak přesně tuto chybu, dosadíme-li tam ξ_0 za x; dosadíme-li tam místo x toliko přibližnou hodnotu kořene ξ_0, dostaneme tu chybu přibližně a to na tolik asi cifer, kolik cifer přesných měla přibližná hodnota místo ξ_0 dosazovaná. Jest tedy současně patrno, že rovnice (7) a (7') nám umožňují hodnotu přibližnou pro ξ_0 o několik cifer korrigovati, po případě, opětujeme-li dosazování do těchto rovnic, hodnotu pro ξ_0 s libovolnou přesností vypočítati.

Rovněž jest jasno, že můžeme si, známe-li dvě čísla, mezi nimiž se ξ_0 nachází, dosazením těchto dvou čísel do pravé strany rovnice (7') zjednati nová dvě čísla značně k sobě bližší, mezi nimiž opět se nachází ξ_0; při tom jest pouze postačitelno, aby v intervalu danými dvěma čísly ohraničeném pravá strana rovnice (7') s rostoucím x buď stále rostla anebo stále ubývala, což snadno se dá zjistiti a zpravidla v malých intervalech vskutku nastává.

Při methodě právě podané bylo předpokládáno, že rovnice daná má jediný kořen o absolutní hodnotě větší než jedna, ostatní pak kořeny, že mají absolutní hodnoty menší než 1. *Jest platna však pro všecky rovnice, při níž jeden kořen ξ_0 má absolutní hodnotu větší než jest absolutní hodnota každého jiného kořene té rovnice.* Neboť máme-li takovouto rovnici a je-li v nějaké číslo menší než $|\xi_0|$ a větší než $|\xi_1|$, $|\xi_2|$, ... kde ξ_1, ξ_2, ... jsou všecky ostatní kořeny dané rovnice různé od ξ_0, pak substitucí

$$x = vy$$

dostaneme rovnici pro y předpokládané vlastnosti a pro níž platí dosažené výsledky. Přejdeme-li však v těch výsledcích k původní neznámé, dospějeme k potvrzení učiněného výroku.

2. Předpokládejme nyní, že rovnice daná (1) má dva kořeny ξ_0, ξ_1 větší absolutní hodnoty než 1, ostatní pak kořeny nechť mají absolutní hodnotu menší než jedna. Pak pravá strana rovnice

$$x^N = a_N x^4 + b_N x^3 + c_N x^2 + d_N x + f_N,$$

dosazujeme-li v ní za x některý z kořenů, jehož absolutní hodnota jest menší než jedna, se blíží k nulle s rostoucím N a totéž platí i o rovnicích

$$x^{N+1}=a_{N+1}x^4+b_{N+1}x^3+c_{N+1}x^2+d_{N+1}x+f_{N+1}$$
$$x^{N+2}=a_{N+2}x^4+b_{N+2}x^3+c_{N+2}x^2+d_{N+2}x+f_{N+2}.$$

Vyloučíme-li x^4 vždy ve dvou po sobě jdoucích z těchto tří rovnic (jako to provedeno již svrchu rovnicí (6)), obdržíme dvě rovnice tvaru

$$a_Nx^{N+1}-a_{N+1}x^N=a'_Nx^3+b'_Nx^2+c'_Nx+d'_N; \tag{6'}$$
$$a_{N+1}x^{N+2}-a_{N+2}x^{N+1}=a'_{N+1}x^3+b'_{N+1}x^2+c'_{N+1}x+d'_{N+1},$$
$$a'_N=b_{N+1}a_N-a_{N+1}b_N, \ldots \tag{6''}$$

kde pro pravé strany jest *přibližně* pro dosti veliké N

$$a'_Nx^3+b'_Nx^2+c'_Nx+d'_N=a'_N(x^3+\alpha'x^2+\beta'x+\gamma'), \ldots\ldots$$

při čemž výraz $x^3+\alpha'x^2+\beta'x+\gamma'$ položen byv rovný nulle dává rovnici, jejíž kořeny jsou právě ty kořeny dané rovnice, jež jsou, jak předpokládáme, menší než jedna. Dělíme-li tedy spolu rovnice (6'') a (6'), dostáváme s *velikým přiblížením pro dosti veliké N a pro x rovné některému z obou kořenů větších co do absolutní hodnoty než 1*

$$\frac{a_{N+1}x^2-a_{N+2}x}{a_Nx-a_{N+1}}=\frac{a'_{N+1}}{a'_N};$$

výsledek tento lze přesně vysloviti takto: *Oba kořeny, jichž absolutní hodnota jest větší než jedna, jsou kořeny rovnice druhého stupně*

$$x^2+Ax+B=0, \tag{8}$$

při čemž

$$B=\lim_{N=\infty}\frac{a'_{N+1}}{a'_N},$$

avšak též, není-li žádné z čísel α', β', γ' rovno nulle,

$$B=\lim_{N=\infty}\frac{b'_{N+1}}{b'_N}=\lim_{N=\infty}\frac{c'_{N+1}}{c'_N}=\lim\frac{d'_{N+1}}{d'_N};$$

$$-A=\lim_{N=\infty}\left(\frac{a_{N+1}}{a_{N+1}}+\frac{a_N}{a_{N+1}}\cdot\frac{a'_{N+1}}{a'_N}\right)=\lim_{N=\infty}\frac{a_Nb_{N+2}-a_{N+2}b_N}{a'_N}.$$

Vyloučíme-li z prvých tří rovnic tohoto odstavce x^4 a x^3 tím, že je po řadě násobíme $a_{N+1}b_{N+2} - a_{N+2}b_{N+1} = a'_{N+1}$, $a_{N+2}b_N - a_Nb_{N+2}$, $a_Nb_{N+1} - a_{N+1}$, $b_N = a'_N$ a pak sečteme, dostaneme rovnici obdobnou rovnici (7)

$$x^2 + \frac{a_{N+2}b_N - a_Nb_{N+2}}{a'_N}x + \frac{a'_{N+1}}{a'_N} = \frac{(c_{N+2}a_Nb_{N+1})}{a'_Nx^{N-2}} + $$
$$+ \frac{(d_{N+2}a_Nb_{N+1})}{a'_Nx^{N-1}} + \frac{(f_{N+2}a_Nb_{N+1})}{a'_Nx^N}, \tag{9}$$

kdež ku př. $(c_{N+2}a_Nb_{N+1})$ značí determinant

$$(c_{N+2}a_Nb_{N+1}) = \begin{vmatrix} c_{N+2}c_Nc_{N+1} \\ a_{N+2}a_Na_{N+1} \\ b_{N+2}b_Nb_{N+} \end{vmatrix}.$$

Když N roste nade všecky meze, blíží se pro $|x| > 1$ rovnice (9) k rovnici (8). Rovnici (9) mohli bychom ku stanovení přesnému kořenů o větší absolutní hodnotě než 1 stejným způsobem využitkovat, jako rovnici (7) resp. (7') v odstavci 1. v obdobném případě.

Úvahy předcházející zůstávají v platnosti pro všecky rovnice, jichž dva kořeny mají absolutní hodnoty větší než ostatní kořeny, z důvodů vyložených ke konci odstavce 1. *Zvláště platí pro rovnice o součinitelích reálných a jichž kořeny o největší absolutní hodnotě jsou dva kořeny komplexní sdružené.* Úvahou podanou vyložena jest methoda ku přesnému stanovení těchto dvou kořenů.

Tímto způsobem mohli bychom postupovati dále a předpokládati, že tři kořeny mají absolutní hodnoty větší než ostatní kořeny a t. d. a jest patrno, že bychom takto mohli všecky kořeny postupně z řady rovnic (2) eliminací přibližně vypočítati. Jest však pohodlnější toliko hrubé přiblížení si uvedenou methodou získat a přesnější hodnoty odvoditi si následovně: Je-li ϱ přibližná hodnota jednoho z kořenů, ku př. kořenu ξ,*) zavedeme do rovnice dané novou neznámou y substitucí

$$x = \varrho + \frac{1}{y},$$

*) Říkáme obecně, že ϱ jest přibližná hodnota kořene ξ, je-li rozdíl ξ a ϱ co do absolutní hodnoty menší než rozdíl každého jiného kořene různého od ξ a čísla ϱ.

pak kořenu ξ odpovídati bude v rovnici pro y kořen $\eta = \frac{1}{\xi - \varrho}$, který bude co do absolutní hodnoty tím větší, čím méně liší se ϱ od ξ; ostatní kořeny rovnice pro y budou čísla menší absolutní hodnoty než η. Můžeme tudíž na rovnici pro y užíti methody odstavce 1, jež tím rychleji povede ku stanovení čísla η, čím blíže jest ϱ ku ξ.

3. Příklad 1. K objasnění předcházejících výkladů a k naznačení různých obratů vhodných při praktickém provádění řešme nejprve rovnici

$$(\alpha)\qquad x^3 = 6x^2 - 10x + 6 \quad \text{aneb} \quad x^3 = 2(3x^2 - 5x + 3).$$

Z té vyplývá nejprve

$$(\beta)\qquad x^4 = 26x^2 - 54x + 36$$

a povýšíme-li danou rovnici na čtverec (používajíce zároveň napsaných právě výrazů pro x^3 a x^4) obdržíme

$$(\gamma)\qquad x^6 = 2^2(97x^2 - 216x + 153),$$

ze které dalším násobením číslem x následuje

$$(\delta)\qquad x^7 = 2^2(366x^2 - 817x + 582).$$

Již na prvý pohled jest patrna při těchto dvou rovnicích přibližná úměrnost koefficientů na pravé straně, čímž stává se pro nás pravděpodobným, že daná rovnice má jeden kořen o větší absolutní hodnotě, než jest absolutní hodnota druhých kořenů. Vypočteme-li (za předpokladu ovšem, že takový jeden kořen jest) přibližné hodnoty pro tento kořen na základě rovnice (4) máme

$$\text{z rovnice } (\gamma)\quad 6 - \frac{216}{97} = 3{\cdot}773\ldots,$$

$$\text{z rovnice } (\delta)\quad 6 - \frac{817}{366} = 3{\cdot}768\ldots,$$

což jsou výsledky dosti blízké, shodné na 3 cifry a můžeme tudíž již rovnic (γ) a (δ) použíti ku přesnějšímu výpočtu kořene, který, jak téměř s jistotou můžeme se domnívati, jest blízký hodnotě 3·77. Z rovnic (γ) a (δ) vyplývá

$$97x^7 - 366x^6 = 2^2(-193x + 456)$$

aneb dělíme-li číslem $97x^6 = 97.2^2(97x^2 - 216x + 153)$

$$(\varepsilon) \qquad x = \frac{366}{97} + \frac{-193x + 456}{97(97x^2 - 216x + 153)}.$$

Výsledek tento nám dává pro x hodnotu $\frac{366}{97} = 6 - \frac{216}{97} =$ $= 3·773\ldots$ zvětšenou o číslo závislé ovšem na x, avšak číslo to jest pro x blízké hodnotě $3·7\ldots$ malé a bude nám dávati opravu pro hodnotu $3·773\ldots$ přesnou na tolik cifer, kolik přesných cifer bude míti hodnota pro x při počítání opravy používaná. Dosaďme do pravé strany rovnice (ε) za x číslo 3·77, dostaneme pro x výraz

$$\frac{366}{97} - \frac{271·61}{69581·1361} = 3·7731959 - 0·00390350 = 3·7692924.$$

Z výpočtu toho jest patrno, že použitá hodnota 3·77 pro x při výpočtu opravy byla na tři cifry přesná, a jelikož oprava (jež spočívá v odečtení čísla 0·0039 ... od 3·77 ...) jest tudíž rovněž na 3 cifry přesná, máme pro x hodnotu 3·7629, která při 6-ciferném počtu rovnici (ε) (a tudíž i rovnici dané s ní v podstatě shodné) vyhovuje. Kdybychom chtěli vypočítati x na větší počet míst, mohli bychom opravu právě vypočtěnou (dosazením za x čísla 3·77) znova počítati dosazujíce x stanovené na více cifer než 3 anebo pokračovat v počítání výrazů pro x^N na podkladě dané rovnice.

Aby čtenář získal si lepší představu o tom, jak rychle asi methoda vyložená vede v našem příkladě k cíli, povýším ještě rovnici (γ) na čtverec (při čemž na pravé straně dosadím dle (α) a (β)). Dostaneme tak

$$x^{12} = 2^4(69548x^2 - 155142x + 110709).$$

Kdybychom z této rovnice dle (4) počítali hodnotu kořene o největší absolutní hodnotě, obdrželi bychom číslo

$$6 - \frac{155142}{69548} = 3·769282\ldots$$

téměř na 6 cifer přesné.

Že při naznačených výpočtech s velikým prospěchem lze používati počítacího stroje anebo multiplikačních tabulek jest na snaze.

Příklad 2. Řešme nyní rovnici

$$x^4 = x - 1.$$

Povýšíme-li rovnici na šestou a klademe-li zároveň na pravé straně $x^4 = x - 1$, $x^5 = x^2 - x$, $x^6 = x^3 - x^2$, dostaneme ihned

$$x^{24} = -19x^3 + 8x^2 + 15x - 14.$$

Jelikož koefficienty jsou ještě malé, povýšíme obě strany této rovnice opět na čtverec a obdržíme

$$x^{48} = 1133x^3 - 664x^2 - 622x + 702.$$

Rovnici tuto vezmeme za základ ku přibližnému výpočtu kořenů rovnice dané. Násobivše x, máme

$$x^{49} = -664x^3 - 622x^2 + 1835x - 1133.$$

Koefficienty pravých stran posledních dvou rovnic nejsou úměrny (příslušné poměry nabývají dokonce hodnoty záporné i kladné) a nastává tedy případ, že jsou aspoň dva kořeny, které mají stejnou — anebo přibližně stejnou — absolutní hodnotu a zároveň větší než jsou absolutní hodnoty kořenů ostatních dané rovnice. Utvořme ještě rovnici

$$x^{50} = -622x^3 + 1835x^2 - 1797x + 664.$$

Z posledních tří rovnic eliminací členů s x^3 dostáváme

$$(\lambda)\quad \begin{aligned} 1134x^{49} + 664x^{48} &= -1145622x^2 + 1666047x - 817561, \\ 664x^{50} - 622x^{49} &= 1605324x^2 - 2334578x + 1145622. \end{aligned}$$

Stanovíme li poměry koefficientů pravých stran, dostáváme čísla

$$-1{\cdot}4012694, \quad -1{\cdot}4012678, \quad -1{\cdot}4012679.$$

I jest z toho patrno, že dva kořeny dané rovnice o větších absolutních hodnotách než druhé dva kořeny hoví rovnici kvadratické, jež, spokojíme-li se hodnotami kořenů na 6 cifer,*) jest

$$(664x^2 - 622x) = 1{\cdot}401269\,(1133x + 664).$$

---

*) Což znamená při reálních číslech, že přibližná hodnota se liší od pravé o méně než $\frac{1}{2.10^6}$ pravé hodnoty; při komplexních pak číslech, že absolutní hodnota rozdílu přibližné a pravé hodnoty jest menší než $\frac{1}{2.10^6}$ absolutní hodnoty pravé hodnoty.

Kořeny této rovnice jsou komplexní sdružené, čtverec absolutní jich hodnoty jest právě číslo 1·40127. Rovnice kvadratická, jíž vyhovují druhé dva kořeny dané rovnice, jest patrně dle (λ)

$$x^2 - \left(\frac{2334578}{1605324} + \varepsilon'\right) x + \left(\frac{1145622}{1605324} + \varepsilon''\right) = 0,$$

kde

$$|\,\varepsilon'\,| < \frac{664}{1605324} \cdot \frac{1}{1{\cdot}4^{\frac{49}{2}}}, \qquad |\,\varepsilon''\,| < \frac{622}{1605324} \cdot \frac{1}{1{\cdot}4^{\frac{49}{2}}},$$

jinak $|\,\varepsilon'\,| < 10^{-7} \,.\, 1{\cdot}07$, $|\,\varepsilon''\,| < 10^{-7} \,.\, 1{\cdot}00$, takže i koefficienty této rovnice jsou stanoveny přesně na šest cifer. Tím, že převedena daná rovnice na dvě rovnice kvadratické o kořenech komplexních, řešení její jest provedeno.

4. Ke konci chci ještě stručně pojednati o rovnicích tvaru často se vyskytujícího

$$x^5 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f, \tag{1}$$

ve kterých součinitelé a, b, c, d, e, f jsou *vesměs čísla kladná*; stupně mohou býti libovolného, pátý byl tu volen jenom k vůli zjednodušení výkladu. Rovnice ty mají jeden a jen jeden kořen kladný (dle věty Descartesovy) a ten má větší absolutní hodnotu než ostatní kořeny té rovnice, jakž snadno čtenář dokáže. Lze tedy ku stanovení tohoto kořene vždy užíti methody odstavce 1. Utvoříme-li dle návodu tohoto odstavce výrazy

$$x^N = a_N x^4 + b_N x^3 + c_N x^2 + d_N x + f_N, \quad N = 6, 7, 8 \ldots$$

pak můžeme nejdříve tvrditi, že *kořen kladný dané rovnice jest obsažen mezi největším a nejmenším z pěti čísel*

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}, \quad \frac{b_{N+1}}{b_N}, \quad \frac{c_{N+1}}{c_N}, \quad \frac{d_{N+1}}{d_N}, \quad \frac{f_{N+1}}{f_N}; \tag{2}$$

důkaz ležící na snadě ponechávám opět čtenáři. Při tom jest zároveň jasno, že čísla a_N, b_N, ... jsou vesměs čísla kladná a taková, že vesměs vzrůstají nade všecky meze s rostoucím N.

Užijme tento výsledek na rovnici tvaru

$$x^m - A = 0, \quad A > 0,$$

t. j. na počítání m-té odmocniny z čísla A. Buďiž α číslo kladné a takové, že $\alpha^m < A$, a klaďme v této rovnici $x = \alpha + \frac{1}{y}$. Rovnice se změní v rovnici

$$(A - \alpha^m)\,y^m = \binom{m}{1}\alpha^{m-1}y^{m-1} + \binom{m}{2}\alpha^{m-2}y^{m-2} + \\ + \binom{m}{3}\alpha^{m-3}y^{m-3} + \ldots + 1, \tag{3}$$

kde $\binom{m}{k}$ jsou binomičtí součinitelé a číslo $A - \alpha^m$ jest číslo kladné; označme číslo toto zkrátka δ. Dostali jsme tak rovnici právě tvaru (1). Vypočtěme z ní rovnici pro y^{m+1} (násobíce na obou stranách δy a na pravé straně nahradíme δy^m dle (3)). Obdržíme

$$\delta^2 . y^{m+1} = \left[\binom{m}{2}\alpha^{m-2}\delta + \binom{m}{1}^2 \alpha^{2m-2}\right]y^{m-1} + \\ + \left[\binom{m}{3}\alpha^{m-3}\delta + \binom{m}{1}\binom{m}{2}\alpha^{2m-3}\right]y^{m-2} + \\ \ldots + \binom{m}{1}\binom{m}{m}\alpha^{m-1}.$$

Utvoříme-li pro poslední dvě rovnice poměry koefficientů, jako ve (2), dostaneme čísla

$$\frac{\binom{m}{k}\alpha^{m-k}\delta + \binom{m}{1}\binom{m}{k-1}\alpha^{2m-k}}{\binom{m}{k-1}\alpha^{m-k+2}\delta} = \frac{\frac{m-k+1}{k}\delta + m\alpha^m}{\alpha\delta},$$

$$k = 2,\ 3,\ 4, \ldots\ m + 1$$

a to celkem m čísel; nejmenší dostaneme pro $k = m + 1$, největší pro $k = 2$. Jest tedy kořen kladný rovnice (3) obsažen mezi čísly

$$\frac{m\alpha^{m-1}}{A - \alpha^m},\quad \frac{(m-1)A + (m+1)\alpha^m}{2(A - \alpha^m)\alpha},$$

aneb vrátíme-li se k rovnici $x^m - A = 0$: *Odmocnina m-tá z čísla A vyhovuje nerovninám*

$$\alpha + \frac{2(A - \alpha^m)\alpha}{(m-1)A + (m+1)\alpha^m} < \sqrt[m]{A} < \alpha + \frac{A - \alpha^m}{m\alpha^{m-1}}. \tag{4}$$

Nerovnina tato dovoluje nám vypočísti $\sqrt[m]{A}$ s libovolnou přesností a dosti pohodlně. Tak ku př. $\sqrt{2}$ jest $A = 2$, $m = 2$; volíme-li si $\alpha = 1$, máme nejprve

$$1 + \frac{2}{2+3} < \sqrt[2]{2} < 1 + \frac{1}{2}, \quad 1{\cdot}4 < \sqrt{2} < 1{\cdot}5.$$

Z nerovnin těchto jest patrno, že můžeme voliti $\alpha = 1{\cdot}4$, i bude pak

$$1{\cdot}4 + \frac{2{\cdot}8\,.\,0{\cdot}04}{8 - 3.0{\cdot}04} < \sqrt[2]{2} < 1{\cdot}4 + \frac{0{\cdot}04}{2.1{\cdot}4},$$

$$1{\cdot}414214 < \sqrt[2]{2} < 1{\cdot}41427.$$

Kdybychom volili nyní $\alpha = 1{\cdot}41421$, dostali bychom z nerovnin (4) $\sqrt{2}$ jedenácticiferně; ostatně jest patrno, že výraz na levé straně nerovniny (4) rychleji se blíží ku $\sqrt[m]{A}$ než výraz na pravé straně, takže specielně pro $\sqrt{A}$ mohli bychom psáti tyto nerovniny

$$\frac{(3\,A + \alpha^2)\,\alpha}{A + 3\alpha^2} < \sqrt{A} < \frac{(A + 3\alpha^2)\,A}{(3A + \alpha^2)\,\alpha}.$$

Pro $\sqrt{10}$, $\alpha = 3$ máme ku př.

$$\frac{39.3}{37} < \sqrt{10} < \frac{370}{39.3} \quad \text{aneb} \quad 3{\cdot}1622 < \sqrt{10} < 3{\cdot}1624.$$

Rozdíl obou hranic pro $\sqrt{A}$ jest, jak snadným počtem plyne,

$$\frac{(A - \alpha^2)^3}{\alpha\,(A + 3\alpha^2)\,(3A + \alpha^2)},$$

což jest přibližně rovno

$$\frac{(\sqrt{A} - \alpha)^3}{2A},$$

odkudž jest patrna značná rychlost, s jakou konverguje přibližná hodnota udaná k $\sqrt{A}$.