Sophie Piccard

Contribution à l'étude des ensembles de distances

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 159--160,161

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121281`

On démontre, par la méthode d'approximations successives, le théorème suivant:

Soit, pour $t \geqq t_0 \geqq 0$, $\bar{x}_i$ un système de solutions des équations (2) satisfaisant à la relation $\lim_{t=\infty} \bar{x}_i e^{-\lambda t} = 0$, λ étant un nombre dont la partie réelle est supérieure à celles de toutes les racines r_i de l'équation caractéristique correspondant au système (2). Il correspond au système $\bar{x}_i$, pour $t \geqq t_0 \geqq 0$, t_0 étant assez grand, un système x_i de solutions des équations (1) satisfaisant, sous la condition $\lim_{t=\infty} a_{ik}(t) = \bar{a}_{ik}$, à la relation $\lim_{t=\infty} x_i e^{-\lambda t} = \lim_{t=\infty} \bar{x}_i e^{-\lambda t} = 0$. Ce système dépend de n constantes arbitraires.

Contribution à l'étude des ensembles de distances.

Sophie Piccard, Neuchâtel.

Soit E un ensemble linéaire quelconque et soit CE son ensemble complémentaire.

Envisageons l'ensemble $D(E) + D(CE)$, $D(P)$ désignant, d'une façon générale, l'ensemble des distances d'un ensemble P.

Si un nombre réel $r > 0$ quelconque n'appartient pas à $D(E) + D(CE)$, on voit sans peine que quel que soit le nombre réel x et quel que soit le nombre entier $n \geqq 1$, tous les nombres de la forme $x \pm (2n - 1)r$ appartiennent à CE, si $x \varepsilon E$, ou à E, si $x \varepsilon CE$, et que tous les nombres de la forme $x \pm 2nr$ appartiennent au même ensemble E ou CE auquel appartient x. Il en résulte qu'aucun nombre de la forme $(2n - 1)r$ n'appartient à $D(E) + D(CE)$ et que tous les nombres de la forme $2nr$ appartiennent à cet ensemble. D'autre part, si l'ensemble $D(E) + D(CE)$ ne contient pas tout les nombres réels positifs, E et CE sont géométriquement congruents et s'obtiennent l'un de l'autre par une translation d'un nombre quelconque dont la valeur absolue n'appartient pas à $D(E) + D(CE)$; donc E et CE ont même puissance, ils ont même ensemble des distances et aucun de ces ensembles ne peut être ni ouvert, ni fermé, ni de mesure nulle, ni de première catégorie de Baire, ni analytique non mesurable (B), ni un corps de nombres n'en comprenant pas la totalité et mesurable (L).

Si M est un ensemble de nombres réels positifs qui n'appartiennent pas à $D(E) + D(CE)$, on voit sans peine que quels que soient le nombre x, les nombres entiers finis $r > 0$ et k_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, ainsi que les nombres n_i de M, le nombre $x + \sum_{i=1}^{r} k_i n_i$ appartient à l'ensemble complémentaire à celui des ensembles E ou CE qui contient x si $\sum_{i=1}^{r} k_i$ est impair, et il appartient à E ou CE en même temps que x, si $\sum_{i=1}^{r} k_i$ est pair. Il en résulte que tout nombre de la forme $\left|\sum_{i=1}^{r} k_i n_i\right|$ où $\sum_{i=1}^{r} k_i$ est impair, fait défaut dans $D(E) + D(CE)$, tandis que tout nombre de la forme $\left|\sum_{i=1}^{r} k_i n_i\right|$, où $\sum_{i=1}^{r} k_i$ est pair, appartient à $D(E) + D(CE)$.

On voit facilement que si deux nombres réels positifs r_1 et r_2, qui ne sont simultanément multiples entiers d'aucun nombre réel, n'appartiennent pas à $D(E) + D(CE)$, il existe un ensemble dense partout de nombres réels qui n'appartiennent pas à $D(E) + D(CE)$, et si deux nombres réels positifs r_1 et r_2 tels que $r_1 = \mu_1 \varrho$, $r_2 = \mu_2 \varrho$, où μ_1 et μ_2 sont deux nombres entiers impairs, sans diviseur commun, et ϱ un nombre réel quelconque, n'appartiennent pas à $D(E) + D(CE)$, le nombre ϱ n'appartient également pas à cet ensemble, tandis que deux nombres réels positifs r_1 et r_2 de la forme $r_1 = \mu_1 \varrho$, $r_2 = \mu_2 \varrho$, où l'un des nombres entiers μ_1, μ_2 est pair et l'autre impair, ne peuvent pas faire simultanément défaut dans $D(E) + D(CE)$, quel que soit l'ensemble E.

Proposition 1. Etant donné un ensemble linéaire E et un ensemble de nombres positifs M, une condition nécessaire pour que $M\,[D(E) + D(CE)] = 0$ est que quels que soient les nombres entiers $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, k_i^1, k_j^2 $(i = 1, 2, \ldots, r_1,\ j = 1, 2, \ldots, r_2)$ et quels que soient les nombres n_i^1, n_j^2 de M, l'on n'ait jamais $\sum_{i=1}^{r_1} k_i^1 n_i^1 = \sum_{j=1}^{r_2} k_j^2 n_j^2$ si $\sum_{i=1}^{r_1} k_i^1$ et $\sum_{j=1}^{r_2} k_j^2$ ne sont pas simultanément pairs ou impairs.

Corollaire 1. Tout ensemble M qui satisfait à la condition de la proposition 1 ne possède aucun élément commun avec son ensemble des distances. Donc un tel ensemble n'est jamais un corps de nombres par rapport à la soustraction.

Corollaire 2. Quel que soit l'ensemble M qui satisfait à la condition de la proposition 1, si l'on désigne par M_1 l'ensemble des nombres $\sum_{i=1}^{r} k_i n_i$, où $r > 0$ et k_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sont des nombres entiers, $\sum_{i=1}^{r} k_i$ est impair et $n_i \varepsilon M$, et par M_2 l'ensemble des nombres $\sum_{i=1}^{r} k_i n_i$, [les notations étant les mêmes que ci-dessus et $\sum_{i=1}^{r} k_i$ étant pair, M_1 satisfait également à la condition de la proposition 1 (donc $M_1 D(M_1) = 0$ et la mesure intérieure (au sens de M. Lebesgue) des deux ensembles M_1 et M_2 est nulle.

Proposition 2. Quel que soit l'ensemble de nombres réels positifs M qui satisfait à la condition de la proposition 1, on peut décomposer l'ensemble de tous les nombres réels en deux sous-ensembles complémentaires E et CE tels que $M[D(E) + D(CE)] = 0$.

Proposition 3. Il existe un ensemble linéaire E tel que l'ensemble $D(E) + D(CE)$ ne contient pas une infinité non dénombrable de nombres réels positifs.

Remarque. Soit E un ensemble linéaire tel que $D(E) + D(CE)$ ne contient pas tous les nombres réels positifs et soit M l'ensemble de tous les nombres réels positifs qui n'appartiennent pas à cet ensemble.

Il résulte de ce qui précède que la mesure intérieure de M est nulle. D'autre part, on voit sans peine que l'ensemble M est sousensemble de l'un des ensembles E ou CE, mais ne coïncide jamais avec cet ensemble, s'il n'est pas dépourvu d'éléments.

Proposition 4. Si E est un ensemble linéaire de mesure (lebesguienne) nulle ou de première catégorie de Baire, CE a pour ensemble des distances l'ensemble de tous les nombres réels non négatifs.

Proposition 5. Si E est un ensemble ouvert, fermé ou analytique non mesurable (B), l'un au moins des ensembles E et CE a pour ensemble des distances l'ensemble de tous les nombres réels non négatifs.

Limite supérieure du module du produit canonique d'ordre infini.

N. Podtjagin, Praha.

Le but de la communication est de donner une application de la théorie de la croissance exposée par l'auteur dans ses deux mémoires, publiés dans les „Annali di Matematica" (1927—1928, 1931). Les recherches sont basées sur le théorème suivant, communiqué par l'auteur au Congrès des savants russes à Sofia en 1930: — Toute fonction régulière $\varphi(u)$ vérifie, à partir d'une certaine valeur de u, l'inégalité