Štefan Schwarz

O jednej úlohe z teorie kužel'osečiek. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, R80--R81

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121279

9. Jak bylo již řečeno v odstavci 1, bylo úkolem tohoto článku odvoditi postupem co nejjednotnějším některé speciální křivky stupně vyššího než druhého. Při tom jsme zjistili, že kuželosečky, vezmeme-li je jako křivky základní a použijeme-li na ně konstrukce úpatnicové nebo pseudoúpatnicové, vedou k řadě nových křivek stupně nejvýše čtvrtého. Pokud se však v našich úvahách vyskytly kuželosečky jako křivky základní, tedy buďto byly ve *zvláštní* poloze vzhledem k souřadným osám, nebo pól sám měl zvláštní polohu.

Je možno lehce dokázati, že také úpatnice a pseudoúpatnice kuželoseček v *obecné* poloze jsou nejvýše čtvrtého stupně, což bude jedním úkolem příštího článku.

O jednej úlohe z teorie kužeľosečiek.

Štefan Schwarz, posluchač přírod. fakulty v Praze.

Položme si za úkol určiť uhol, pod akým videť danú kužeľosečku z daného bodu.

Kužeľosečka nech má rovnicu

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

a bod nech je (x_0, y_0).

Veďme bodom (x_0, y_0) priamku o smernici $\operatorname{tg}\alpha$. Jej parametrické rovnice sú $x = x_0 + d\cos\alpha$, $y = y_0 + d\sin\alpha$, kde d je vzdialenosť bodu (x, y) od (x_0, y_0). Pre priesečík tejto priamky s kužeľosečkou (1) dostaneme dosadením rovnicu pre d:

$$d^2\,(a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha) + 2d\cos\alpha\,.\,f_1(x_0, y_0) + \\ + 2d\sin\alpha\,.\,f_2(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) = 0, \tag{2}$$

kde

$$f_1(x_0, y_0) \equiv a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}$$
$$f_2(x_0, y_0) \equiv a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}$$

a $f(x_0, y_0)$ je ľavá strana rovnice kužeľosečky, do ktorej sú dosadené súradnice x_0, y_0.

Aby daná priamka bola tečnou kužeľosečky (1), nutno, aby rovnica (2) mala koreň dvojnásobný, t. j. diskriminant musí byť rovný nule. Tým dostávame podmienku pre smer α

$$\sin^2\alpha\,.\,(f_2^2 - a_{22}f) + 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,(f_1\,.\,f_2 - a_{12}f) + \\ + \cos^2\alpha\,(f_1^2 - a_{11}f) = 0, \tag{3}$$

pri čom výrazov f_1, f_2, f, užívame miesto obšírne písaného $f_1(x_0, y_0)$ atď.

Rovnicou (3) sú určené smernice tečien $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$ vedených z (x_0, y_0) ku kužeľosečke. Pre ich uhol platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1\,.\,\operatorname{tg}\alpha_2}. \tag{4}$$

Čitateľ zlomku je

$$\frac{\pm 2}{f_2^2 - a_{22}f} \cdot \sqrt{(f_1 f_2 - a_{12}f)^2 - (f_1^2 - a_{11}f)(f_2^2 - a_{22}f)}.$$

Tento výraz sa dá veľmi zjednodušiť. Zaveďme

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(t. zv. diskriminant kužeľosečky) a označme doplnok prvku a_{ik} znakom A_{ik}. Výraz pod odmocninou je

$$(a_{11}f_2^2 - 2a_{12}f_1f_2 + a_{22}f_1^2)\,f - A_{33}f^2.$$

Ale ľahko zistíme — trebars rozvedením — že platí vzťah

$$a_{11}f_2^2 - 2a_{12}f_1f_2 + a_{22}f_1^2 = A_{33}\,.\,f - A.$$

Čitateľ zlomku (4) je teda

$$\pm 2\,.\,\frac{\sqrt{-A\,.\,f}}{f_2^2 - a_{22}f}.$$

Menovateľ je

$$1 + \frac{f_1^2 - a_{11}f}{f_2^2 - a_{22}f} = \frac{f_1^2 + f_2^2 - (a_{11} + a_{22})\,f}{f_2^2 - a_{22}f}. \qquad (5)$$

Máme konečne, keď rozvedeme menovateľa

$$\operatorname{tg}\alpha = \mp \frac{2\sqrt{-A\,.\,f(x_0, y_0)}}{(x_0^2 + y_0^2)\,A_{33} - 2x_0A_{13} - 2y_0A_{23} + A_{11} + A_{22}}. \qquad (6)$$

Dvojznačnosť spočíva v tom, že sme nevolili, ktorý uhol oboch priamok budeme uvažovať.

Obecných výsledkov (6) použijeme teraz k rozmanitým specializáciam.

I. Budeme uvažovať len kužeľosečky jednoduché; pre složené kužeľosečky máme tento výsledok: keďže $A = 0$, môžu nastať dva prípady: a) Je-li diskriminant hodnosti 2 (kužeľosečka sa skladá z dvoch rôznych priamok), je aspoň jedno z čísiel A_{11}, A_{22}, A_{33} — podľa známej vety o symetrických determinantoch — od nuly rôzné, a teda pre ľub. bod (x_0, y_0) je uhol nula. Súhlasí to so známym faktom, že obe tečny sú v tomto prípade spojnice daného bodu so singulárnym bodom kužeľosečky.

b) Je-li hodnosť diskriminantu 1 (kužeľosečka je složená z dvoch priamok totožných), sú všetky koeficienty v menovateli rovné nule a výraz pre tg α nemá smyslu, pretože i čitateľ je nula. To zodpovedá tomu, že v tomto prípade každá priamka bodom (x_0, y_0) vedená je tečnou.

(Příště dokončení.)