Michel Petrovitch

Sur une classe d'intégrales de Laplace-Abel

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 157--158

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121272

équations

$$
\begin{aligned}
A &= \mathrm{P}(x, y, z)\\
B &= \mathrm{Q}(x, y, z)\\
C &= \mathrm{R}(x, y, z)
\end{aligned}
$$

ont au moins un système de solutions $x = a$, $y = b$, $z = c$ réelles.

Les considérations précédents peuvent être étendus à des fonctions plus générales que les polynomes.

Sur une classe d'intégrales de Laplace-Abel.

Michel Petrovitch, Beograd.

Comme l'on sait, il n'existe pas d'intégrales réelles

$$\mathrm{F}(z) = \int_a^b \mathrm{u}(t)\, e^{zt}\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

non identiquement nulles, qui auraient comme zéros la suite naturelle des nombres premiers réels. L'auteur démontre l'existence d'intégrales (1) ayant commes zéros la suite naturelle des nombres premiers purement imaginaires et indique un moyen fort simple pour former effectivement de telles intégrales.

A cet effet soit

$$\sum_{m=2}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \tag{2}$$

le développement en série de Fourier d'une fonction $\mathrm{f}(x)$. Tel serait p. ex. le développement

$$\tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{4}\sin 4x + \ldots$$

représentant entre $x = 0$ et $x = 2\pi$ la fonction $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x -$ $- \sin x$.

Soit $A_2, A_3, A_4, \ldots$ une suite de coefficients tels que la série

$$\mathrm{u}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n\, \mathrm{f}(nt) \tag{3}$$

converge pour tout t compris entre 0 et 2π, et envisageons l'intégrale (1) où $a = 0$, $b = 2\pi$, $\mathrm{u}(t)$ étant une fonction (3). L'auteur montre que:

La fonction $\mathrm{F}(z)$ est une fonction entière de z, du genre un, s'annulant pour les valeurs $z = iq$ lorsque q est un nombre premier positif quelconque, et différent de 0, lorsque q est un nombre composé.

Le théorème fournit, entre autres conséquences, le moyen de former des séries de puissances à lacunes dont les rangs seraient égaux aux termes de la suite naturelle des nombres premiers.

Il conduit égelement à certains resultats se rattachant au problème d'approximation des fonctions continues par des combinaisons linéaires des éxpressions x^{ip_k} où les p_k forment la suite naturelle des nombres premiers.

Sur une propriété asymptotique à zéro des équations linéaires.

Tadya Peyovitch, Beograd.

Soit donné un système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, x_k = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

où $a_{ik}(t)$ sont des fonctions continues de la variable réelle $t \geqq t_0 \geqq 0$, tendant vers des limites finies, $\lim_{t=\infty} a_{ik}(t) = \overline{a}_{ik}$, $f_i(t)$ étant des fonctions continues de la variable réelle $t \geqq t_0 \geqq 0$, satisfaisant à la relation $\lim_{t=\infty} f_i(t)\, e^{-\lambda t} = 0$ où λ est un nombre dont la partie réelle est supérieure à celles de toutes les racines r_i de l'équation caractéristique correspondant au système d'équations

$$\frac{d\overline{x}_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{ik}\overline{x}_k = f_i(t). \tag{2}$$

En posant $x_i = e^{\lambda t} y_i$, $\overline{x}_i = e^{t\lambda}\overline{y}_i$ les équations (1) et (2) deviennent respectivement

$$\frac{dy_i}{dt} + (a_{ii}(t) + \lambda)\, y_i + \sum_{\substack{k=1\\ k \neq i}}^{n} a_{ik}(t)\, y_k = f_i(t)\, e^{-\lambda t}, \tag{1'}$$

$$\frac{d\overline{y}_i}{dt} + (\overline{a}_{ii} + \lambda)\, \overline{y}_i + \sum_{\substack{k=1\\ k \neq i}}^{n} \overline{a}_{ik}\overline{y}_k = f_i(t)\, e^{-\lambda t}. \tag{2'}$$

Soit, pour $t \geqq t_0 \geqq 0$, $\overline{y}_i = y^0{}_i$ un système de solutions bornées des équations (2') satisfaisant à la relation $\lim_{t=\infty} \overline{y}_i = \lim_{t=\infty} y_i^0 = 0$; on aura $| y_i^0 | \leqq C$, C étant un nombre positif et fixe. En partant du système y_i^0, formons les suites des fonctions bornées $y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^m, \ldots$ comme les solutions successives d'équations

$$\frac{dy_i^m}{dt} + (\overline{a}_{it} + \lambda)\; y_i^m + \sum_{\substack{k=1\\ k \neq i}}^{n} \overline{a}_{ik}\, y_k^m = f_i(t)\, e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t)\; y_k^{m-1}.^{1)} \tag{3}$$

1) $\delta_{ik}(t) = \overline{a}_{ik} - a_{ik}(t)$, $\lim \delta_{ik}(t) = 0$ pour $t = \infty$.