Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Rychlík

Determinanty v tělesech libovolné charakteristiky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 135--136

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121271`

Determinanty v tělesech libovolné charakteristiky.

K. Rychlík, Praha.

V hlavních rysech budu užívati terminologie a označení zavedeného v článku p. prof. Petra: O definici determinantu, Časopis 60, 1931, str. 201—213. Označím dále K (komutativní) těleso libovolné charakteristiky p.

Nejprve budu definovati, kdy forma m-lineární m řad neurčitých (transcendentních) prvků n-árních v K $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$

$$F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}) = \Sigma\, a_{i_1 i_2 \ldots i_m} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_m}^{(m)}$$

je alternující. Při tom se vztahuje Σ na indexy $i_1, i_2, \ldots, i_m$ probíhající čísla $1, 2, \ldots, n$ a $a_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ jsou prvky z tělesa K.

$$F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$$

je alternující forma, je-li

$$F(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}) = 0,$$

když je splněn aspoň jeden z $m - 1$ vztahů

$$x^{(1)} = x^{(2)},\ x^{(2)} = x^{(3)}, \ldots, x^{(m-1)} = x^{(m)}.$$

Pak je též $F(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) = 0$, kdykoliv $x^{(i)} = x^{(j)}$, kdež i, j jsou dvě libovolná různá z čísel $1, 2, \ldots, m$.

Definice: „$F(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$ je alternující forma, když při transposici řad $x^{(i)}$ a $x^{(i+1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m - 1)$ forma ta se násobí $- 1$“, je s prvou definicí ekvivalentní jen pro $p \neq 2$. Při $p = 2$ dlužno připojiti další podmínku: „V alternující formě $F(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$ je $a_{i_1, i_2, \ldots i_m} = 0$, jsou-li aspoň dva z indexů $i_1, i_2, \ldots, i_m$ sobě rovny“. Tato podmínka je při $p \neq 2$ splněna sama sebou.

Determinant $| x_i^{(n)} |$ v neurčitých prvcích $x_i^{(n)}$ možno pak definovati jako alternující m-lineární formu m řad neurčitých prvků m-árních

$$[x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}],\ [x_1^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)}], \ldots, [x_1^{(m)}, \ldots, x_m^{(m)}],$$

v níž součinitel při součinu $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(m)}$ je roven 1.

Determinant $| a_i^{(k)} |$ s prvky $a_i^{(k)}$ z tělesa K dostaneme z determinantu s prvky neurčitými pomocí principu dosazení.

Způsob odvození vět z teorie determinantů je pak tento: Stejným postupem jako v článku p. prof. Petra odvodíme věty pro determinanty s neurčitými koeficienty a z těch pak pomocí principu dosazení věty pro determinanty s koeficienty z tělesa K.

Možno však přímo užíti vět pro determinanty z tělesa čísel reálných (nebo komplexních) podobným způsobem, jako jsem to ukázal při důkazu věty, že determinant, v němž dvě řady jsou si rovny, má hodnotu 0. (Crelles J. 167, 1932, str. 197, Hasse, Aufgabensammlung zur Höheren Algebra, S. Göschen 1082, str. 97).

Determinanten in Körpern von beliebiger Charakteristik. Um die von Prof. K. Petr im Artikel: O definici determinantu, Časopis 60, 1931, S. 201—213, dargelegte Theorie der Determinanten auf den Fall der Körper von Charakteristik $p = 2$ zu erweitern, muß man die alternierende Funktion passend definieren.

Compléments à ma communication du Congrès de Chambéry.

P. Sergescu, professeur à l'Université de Cluj.

1. Dans ma communication au congrès de Chambéry, 1933, de l'Association française pour l'avancement des sciences (57 session, pag. 50—54) j'ai montré que les équations $\sum_{k=1}^{n} (1 + kr)^p x^k = 0$ où $p = 1$, 2 ou négatif, ont au plus deux racines réelles. Je supposais tous les termes de la progression positifs, donc $r > 0$ sans restreindre la généralité.*) Ces résultats peuvent être étendus.

2. L'équation $\sum_{k=1}^{n} (1 + kr)^3 x^k = 0$, où $r > 0$, a au plus trois racines réelles.

Les racines réelles sont négatives et comprises entre -1 et 0 (théorème de Kakeya). En multipliant par $(1 - x)^4$:

$$(1 - x)^4 \sum_{k=1}^{n} (1 + kr)^3 x^k = 1 + [(1 + r)^3 - 4]\, x +$$
$$+ [4r^3 - 6r + 3]\, x^2 + (r - 1)^3 x^3 - [1 + (n + 1)\, r]^3 x^{n+1} +$$
$$+ \{4\,[1 + (n + 1)\, r^3] - [1 + (n + 2)\, r]^3\}\, x^{n+2} - \{4\,(1 + nr)^3 -$$
$$- [1 + (n - 1)\, r\}^3 x^{n+3} + (1 + nr)^3 x^{n+4} = 0.$$

Les parenthèses qui multiplient x^2, x^{n+1}, x^{n+2}, x^{n+3}, x^{n+4} sont positives. Cas n impair. La transformée en $-x$ de cette expression a trois variations. L'équation proposée a effectivement trois racines réelles. En effet, posons:

$$y = 1 - [(1 + r)^3 - 4]\, x + (4r^3 - 6r + 3)\, x^2 - (r - 1)^3 x^3$$
$$Y = [1 + (n + 1)\, r]^3 x^{n+1} + [\ldots]\, x^{n+2} + [\ldots]\, x^{n+3} + (1 + nr)^3 x^{n+4}.$$

L'équation revient à $y = Y$. Pour $r > 2$, y coupe Ox en deux points $\alpha < \beta$ situés entre 0 et 1. Y croit de 0 à $Y(1) > y(1)$. Donc Y coupe y en un point d'abscisse $< \alpha$. De plus, on peut prendre n assez grand pour que pour $x_0 > \beta$, donné, on ait $Y(x_0) <$

*) Il faut supprimer pag. 53 les lignes 5 et 6, qui se sont glissées par une erreur de transcription.