und H. Hahn (Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen; Monatshefte für Mathematik und Physik 23 (1912), S. 161 bis 224) ausgesprochen worden sind.

Grundzüge einer Inhaltslehre im Hilbertschen Raume.

Karl Löwner, Prag.

Bei dem üblichen axiomatischen Aufbau der Inhaltslehre im endlichdimensionalen Raume wird der Inhalt $\mu(\mathfrak{A})$ einer Punktmenge $\mathfrak{A}$ in Abhängigkeit von der letzteren als eine Mengenfunktion aufgefaßt, die folgenden Postulaten genügen soll:

a) Der Definitionsbereich von $\mu(\mathfrak{A})$ ist ein σ-Körper K, der mit jeder Menge auch alle ihre kongruenten enthält.

b) $\mu(\mathfrak{A})$ ist reell und nicht negativ.

c) Ist $\mathfrak{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_n < K$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_l = 0$ $(k \neq l)$

so ist $\mu(\mathfrak{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{A}_n)$.

d) Ist die Menge $\mathfrak{A}$ aus K zu $\mathfrak{B}$ kongruent, so ist $\mu(\mathfrak{A}) = \mu(\mathfrak{B})$.

e) Jeder Würfel $\mathfrak{W}$ ist meßbar und $\mu(\mathfrak{W}) > 0$.

Versucht man eine entsprechende Theorie im Hilbertschen Raume aufzubauen, so liegt es nahe, zunächst eine kleine Modifikation von e) eintreten zu lassen, indem man die Würfel, die hier nichtbeschränkte Mengen darstellen, durch Kugeln ersetzt. Doch auch dann ist das Axiomensystem nicht erfüllbar. Das sieht man schon aus der Tatsache, daß in einer Kugel vom Radius $4a$ $(a > 0)$ abzählbar unendlich viele paarweise punktfremde Kugeln vom Radius a untergebracht werden können. Ist μ_b der Inhalt einer Kugel vom Radius b, so müßte wegen b), c), d) die Ungleichung

$$n\mu_a \leqq \mu_{4a} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gelten. Hieraus folgt wegen Gültigkeit des Archimedischen Axioms im Bereich der reellen Zahlen $\mu_a = 0$, im Widerspruch zu dem modifizierten e).

Um zu einer widerspruchsfreien Theorie zu gelangen, müssen wir eines der fünf Axiome a)—e) fallen lassen. Die eben durchgeführte Überlegung legt nahe, das Axiom b) wesentlich abzuändern, indem man den Bereich der reellen Zahlen durch ein passendes nichtarchimedisches Größensystem ersetzt. Es erweist sich außerdem als nötig, auch an den Postulaten a) und c) Änderungen vorzunehmen, die aber weniger einschneidend sind: Bei der Definition des σ-Körpers werde nur gefordert, daß mit den $\mathfrak{A}_n < K$, auch $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ zu K gehört, falls die $\mathfrak{A}_n$ paarweise punktfremd sind und der Durchmesser $\delta(\mathfrak{A}_n)$ mit $n \to \infty$ gegen Null konvergiert und dies werde auch im Axiom c) vorausgesetzt.

Wir kombinieren die axiomatische Methode mit der genetischen, indem wir den Inhalt zunächst für gewisse einfache Körper definieren und dann durch Grenzübergänge verallgemeinern. Es sei zunächst $\mathfrak{R}$ ein beschränkter Rotationskörper mit einer Achse von endlicher Dimension. Man sieht leicht ein, daß ein solcher Körper eine wohl bestimmte Achse $\mathfrak{a}_k$ von möglichst kleiner Dimension k besitzt und die übrigen Achsen $\mathfrak{a}_l$ $(l > k)$ durch die linearen Räume gebildet werden, die $\mathfrak{a}_k$ enthalten. Von $\mathfrak{R}$ werde ferner gefordert, daß sein Schnitt mit einem $\mathfrak{a}_{k+1}$ eine im Lesbegueschen Sinne meßbare $k+1$-dimensionale Punktmenge ist. Mit $\mu_k(r)$ werde der Inhalt der Schnittmenge eines zu $\mathfrak{a}_k$ parallelen Raumes, der Dimension k mit $\mathfrak{R}$ in der Entfernung r von $\mathfrak{a}_k$ bezeichnet. Er existiert bekanntlich für alle r bis auf eine Menge vom Maße Null[1]) und verschwindet selbstverständlich für alle r, die größer sind als der Rotationsradius $\varrho(\mathfrak{R})$ von $\mathfrak{R}$. Damit ist die obere Grenze der Distanzen von Punkten aus $\mathfrak{R}$ von der Achse $\mathfrak{a}_k$ gemeint. Hätte man mit einer Achse $\mathfrak{a}_l$ $(l > k)$ operiert, so wäre man zu einer Funktion $\mu_l(r)$ $(l > k)$ gelangt. Offenbar bestehen die Relationen

$$\mu_{l+1}(r) = 2\int_r^{\infty} \frac{\mu_l(\varrho)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - r^2}} = \mathrm{A}(\mu_l) \quad (l \geqq k).$$

Wir wollen nun die weitere (im folgenden stets als erfüllt angesehene) Voraussetzung einführen, daß die Integralgleichungen

$$\mu_k = \mathrm{A}(\mu_{k-1}),\ \mu_{k-1} = \mathrm{A}(\mu_{k-2}),\ \ldots,\ \mu_1 = \mathrm{A}(\mu_0)$$

der Reihe nach durch im Lesbegueschen Sinne integrable Funktionen auflösbar sind. Sie sind dan eindeutig bestimmt.

Wenn wir uns von dem Wunsche leiten lassen, daß in der neuen Theorie das Cavalierische Prinzip möglichst Geltung haben soll, müssen zwei Rotationskörper $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ mit den Achsen $\mathfrak{a}_{k_1}$, $\mathfrak{a}_{k_2}$, für die $\mu_l^1(r) = \mu_l^2(r)$ für $l \geq k_1, k_2$ gilt, gleichen Inhalt erhalten. Dies führt uns zu folgender Definition: Als Inhalt $\mu(\mathfrak{R})$ des Rotationskörpers $\mathfrak{R}$ soll die Funktion $\mu_0(r)$ bezeichnet werden.

---

[1]) Alle auftretenden Funktionen sollen nur bis auf eine Menge vom Maße Null betrachtet werden.

Wir führen nun kompliziertere Körper ein, die als **rotative Körper** bezeichnet werden sollen. Darunter werde jede Vereinigung $\mathfrak{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n$ von paarweise fremden Rotationskörpern verstanden, die der Limesbedingung $\lim_{n \to \infty} \varrho(\mathfrak{R}_n)$ genügt. Man kann nun das **fundamentale Theorem** beweisen, daß die (für ein positives r aus nur endlich vielen Summanden bestehende) Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{R}_n)$ sich nicht ändert, wenn man $\mathfrak{K}$ auf irgend eine andere Weise unter Beachtung der Limesbedingung in Rotationskörper zerlegt, und wir wollen sie als **Inhalt** $\mu(\mathfrak{K})$ von $\mathfrak{K}$ bezeichnen. Mit rotativen Körpern lassen sich bereits sehr allgemeine Mengen approximieren. Man kann von hier aus zu einer sehr allgemeinen Inhaltslehre gelangen und in ähnlicher Weise wie im endlichdimensionalen Raume auf ihr eine Lesbeguesche Integrationstheorie gründen, was hier wegen Raummangels nicht ausgeführt werden kann.

Es kann auch nicht besprochen werden, in welchem Sinne die Funktionen $\mu(r)$ einer positiven Veränderlichen r als nichtarchimedisches Größensystem angesehen werden können.

Sur les valeurs prises par un ensemble de fonctions dans le plan et dans l'espace.

Octav Onicescu, Bucuresti.

Je considère un système de deux polynomes réels $P(x, y)$ et $Q(x, y)$; je suppose que

$$\frac{D(P, Q)}{D(x, y)}$$

est en général positif, et nul seulement sur un ensemble de points isolés.

Je démontre, en me servant des mêmes méthodes de caractère topologique qui m'ont servi à la démonstration du théorème de Picard pour les fonctions holomnphes entières d'ordre fini, que la correspondance

$$X = P(x, y)$$
$$Y = Q(x, y)$$

a toute au plus un système de valeurs d'exception.

Dans le cas de trois dimensions, et avec des conditions analogues, le système de trois polynomes P, Q, R n'admet aucun point exceptionnel; c'est à dire quelque soit le système A, B, C, les