Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Tadya Peyovitch

Sur une propriété asymptotique à zéro des équations linéaires

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 158--159

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121254

Il conduit égelement à certains resultats se rattachant au problème d'approximation des fonctions continues par des combinaisons linéaires des éxpressions x^{ip_k} où les p_k forment la suite naturelle des nombres premiers.

Sur une propriété asymptotique à zéro des équations linéaires.

Tadya Peyovitch, Beograd.

Soit donné un système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, x_k = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

où $a_{ik}(t)$ sont des fonctions continues de la variable réelle $t \geqq t_0 \geqq \geqq 0$, tendant vers des limites finies, $\lim\limits_{t=\infty} a_{ik}(t) = \bar{a}_{ik}$, $f_i(t)$ étant des fonctions continues de la variable réelle $t \geqq t_0 \geqq 0$, satisfaisant à la relation $\lim\limits_{t=\infty} f_i(t)\, e^{-\lambda t} = 0$ où λ est un nombre dont la partie réelle est supérieure à celles de toutes les racines r_ι de l'équation caractéristique correspondant au système d'équations

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik}\bar{x}_k = f_i(t). \tag{2}$$

En posant $x_i = e^{\lambda t} y_i$, $\bar{x}_i = e^{t\lambda}\bar{y}_i$ les équations (1) et (2) deviennent respectivement

$$\frac{dy_i}{dt} + (a_{ii}(t) + \lambda)\, y_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}(t)\, y_k = f_i(t)\, e^{-\lambda t}, \tag{1'}$$

$$\frac{d\bar{y}_i}{dt} + (\bar{a}_{ii} + \lambda)\, \bar{y}_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \bar{a}_{ik}\bar{y}_k = f_i(t)\, e^{-\lambda t}. \tag{2'}$$

Soit, pour $t \geqq t_0 \geqq 0$, $\bar{y}_i = y^0_\iota$ un système de solutions bornées des équations (2') satisfaisant à la relation $\lim\limits_{t=\infty} \bar{y}_\iota = \lim\limits_{t=\infty} y_\iota^0 = 0$; on aura $|\, y_i^0 \,| \leqq C$, C étant un nombre positif et fixe. En partant du système y_ι^0, formons les suites des fonctions bornées $y_i^1, y_i^2, \ldots, y_\iota^m, \ldots$ comme les solutions successives d'équations

$$\frac{dy_i^m}{dt} + (\bar{a}_{it} + \lambda)\; y_i^m + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \bar{a}_{ik}\, y_k^m = f_i(t)\, e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{\iota k}(t)\; y_k^{m-1}.[1] \tag{3}$$

[1]) $\delta_{ik}(t) = \bar{a}_{ik} - a_{ik}(t)$, $\lim \delta_{ik}(t) = 0$ pour $t = \infty$.

On démontre, par la méthode d'approximations successives, le théorème suivant:

Soit, pour $t \geqq t_0 \geqq 0$, $\overline{x}_i$ un système de solutions des équations (2) satisfaisant à la relation $\lim\limits_{t=\infty} \overline{x}_i e^{-\lambda t} = 0$, λ étant un nombre dont la partie réelle est supérieure à celles de toutes les racines r_i de l'équation caractéristique correspondant au système (2). Il correspond au système $\overline{x}_i$, pour $t \geqq t_0 \geqq 0$, t_0 étant assez grand, un système x_i de solutions des équations (1) satisfaisant, sous la condition $\lim\limits_{t=\infty} \mathrm{a}_{ik}(t) = \overline{\mathrm{a}}_{ik}$, à la relation $\lim\limits_{t=\infty} x_i e^{-\lambda t} = \lim\limits_{t=\infty} \overline{x}_i e^{-\lambda t} = 0$. Ce système dépend de n constantes arbitraires.

Contribution à l'étude des ensembles de distances.

Sophie Piccard, Neuchâtel.

Soit E un ensemble linéaire quelconque et soit CE son ensemble complémentaire.

Envisageons l'ensemble $\mathrm{D}(E) + \mathrm{D}(CE)$, $\mathrm{D}(P)$ désignant, d'une façon générale, l'ensemble des distances d'un ensemble P.

Si un nombre réel $r > 0$ quelconque n'appartient pas à $D(E) + D(CE)$, on voit sans peine que quel que soit le nombre réel x et quel que soit le nombre entier $n \geqq 1$, tous les nombres de la forme $x \pm (2n - 1)\, r$ appartiennent à CE, si $x \varepsilon E$, ou à E, si $x \varepsilon CE$, et que tous les nombres de la forme $x \pm 2nr$ appartiennent au même ensemble E ou CE auquel appartient x. Il en résulte qu'aucun nombre de la forme $(2n - 1)\, r$ n'appartient à $D(E) + D(CE)$ et que tous les nombres de la forme $2nr$ appartiennent à cet ensemble. D'autre part, si l'ensemble $D(E) + D(CE)$ ne contient pas tout les nombres réels positifs, E et CE sont géométriquement congruents et s'obtiennent l'un de l'autre par une translation d'un nombre quelconque dont la valeur absolue n'appartient pas à $D(E) + D(CE)$; donc E et CE ont même puissance, ils ont même ensemble des distances et aucun de ces ensembles ne peut être ni ouvert, ni fermé, ni de mesure nulle, ni de première catégorie de Baire, ni analytique non mesurable (B), ni un corps de nombres n'en comprenant pas la totalité et mesurable (L).

Si M est un ensemble de nombres réels positifs qui n'appartiennent pas à $D(E) + D(CE)$, on voit sans peine que quels que soient le nombre x, les nombres entiers finis $r > 0$ et k_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$,