Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Dusl

O současném stavu teorie a některých nových problémech z teorie funkcí Mathieuových

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 143--145

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121250

par une méthode régulière, qui fait appel aux fonctions abéliennes hyperelliptiques; etc. . . .

L'étude des systèmes conservatifs, c'est à dire ici de l'équation aux dérivées partielles $pq = \lambda\ (U + h)$ où $p = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, $q = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$. λ et U étant des fonctions de x, y à trouver pour qu'une réduction fixée d'avance se prèsente, conduit à des conclusions analogues — j'indique à titre d'exemple, quelques uns des résultats obtenus. Il y a lieu de distinguer suivant que l'élément linéaire $4\lambda\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ convient au plan, à la sphère, à une surface de révolution quelconque, est un $\mathrm{d}s^2$ de Liouville, etc. . . (Cf. Comptes rendus Ac. Sciences, Paris, *185*, 1927, p. 1568).

Enfin j'ai abordé la détermination des problèmes non conservatifs du plan qui possèdent des intégrales quadratiques ou d'ordre supérieur par rapport aux vitesses; problèmes où les mêmes méthodes s'appliquent encore.

O současném stavu teorie a některých nových problémech z teorie funkcí Mathieuových.

Karel Dusl, Praha.

Diferenciální rovnice Mathieuova

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + (a + 16q \cos 2x)\ y = 0 \qquad (1)$$

má partikulární integrály periodické a neperiodické tvaru $e^{\pm\mu x}\Phi(x)$, kde $\Phi(x)$ je reálná funkce periodická. Mezi funkce periodické patří autofunkce Whittaker-Mathieuovy $\mathrm{se}_n(x)$, $\mathrm{ce}_n(x)$ o periodě π resp. 2π.

Vedle těchto funkcí periodických uvažoval E. C. G. Poole roku 1921 řešení $\mathrm{se}_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $\mathrm{ce}_{n+\frac{1}{2}}(x)$ o periodě 4π. Podobně lze konstruovati řešení o periodě vícenásobné 6π atd.

Mezi funkce neperiodické náleží především funkce Lindsay-Inceovy, t. j. Mathieuovy funkce druhého druhu $\mathrm{in}_k(x)$, $\mathrm{jn}_k(x)$. Důležitá jest otázka stability těchto neperiodických řešení. Současné práce Struttovy, P. Humbertovy, Goldsteinovy týkají se především právě oborů stability těchto funkcí a to nejen pro $q = 0$, nýbrž i reálná q vůbec. Obdržíme tak zajímavé křivky, které udávají rozhraní mezi obory stability i nestability.

V letech 1922/23 zavedl L. Ince a P. Humbert t. zv. funkce Mathieuovy vyšších řádů, jakožto periodické partikulární integrály diferenciální rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} + [a + \nu^2 - \frac{\nu\ (\nu - 1)}{\sin^2 x} + k^2 \cos^2 x]\ z = 0. \qquad (2)$$

Pro $\nu = 0$ neb 1 redukují se tyto funkce na funkce Mathieuovy, pro $k = 0, a = n(n + 2\nu)$ na polynomy Gegenbauerovy C_n^ν (cos x) event. funkce jim přidružené H_n^ν (cos x).

Podobně jako funkce Mathieuovy se vztahují k eliptickému válci, vztahují se tyto vyšší funkce Mathieuovy k eliptickému resp. hyperbolickému hyperválci v prostoru čtyřrozměrném a druží se takto k funkcím hypersférickým.

Vedle těchto funkcí zavedl P. Humbert r. 1922 funkce Mathieuovy o dvou a více proměnných.

Připomenu-li ještě práce Jeffreysovy (1923/24), Goldsteinovy (1927) o asymptotickém průběhu hraničních křivek mezi stabilními a nestabilními obory řešení, dotkl jsem se nejdůležitějších otázek této teorie.

Chci poukázati k některým problémům novým; na některé upozornil také M. J. O. Strutt r. 1932.

1. Nechť proměnná x probíhá v komplexní rovině x spojitou křivku. Potom periodická funkce $a + 16q \cos 2x = \varphi(x)$ bude probíhati v rovině φ rovněž spojitou křivku. Mají se určiti ony hodnoty a, které při daném q poskytují řešení stabilní. — Tak pro $x = zi$ dospějeme k rovnici:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (16q \cos h\, 2z - a)\, y = 0, \tag{3}$$

jejíž řešení dáno jest řadou funkcí Besselových:

$$y = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m I_m(ke^{-z})\, I_{m+\mu}(ke^{z}), \quad k = \sqrt{32q}$$

kde μ lze spočítati metodou Hillovou. — Stejně vede rovnice (2) k rovnici

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 2\nu \operatorname{cotg} hz \frac{dy}{dz} - (16q \cos h\, 2z - a)\, y = 0, \tag{4}$$

jejíž řešení jest dáno řadou funkcí Besselových vyšších řádů, jak je zavedl P. Humbert (Atti della Pont. Academia delle Science Nuovi Lincei 1930):

$$e^{\frac{x}{3}\left(u+v-\frac{1}{uv}\right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u^m v^n\, I_{m,n}(x). \tag{5}$$

Další krok k řešení problému jest studium partikulárných integrálů rovnic (1) a (2), zavedeme-li $x = e^{i\varphi}$ na kruhu jednotkovém, čehož týkají se moje práce.

2. Jiná poznámka týká se ortogonality funkcí Mathieuových.

Obyčejně se periodické funkce Mathieuovy definují jako ony trigonometrické řady, které pro $q = 0$ redukují se na funkce

$\cos nx$ a $\sin nx$. Jak Goldstein r. 1927 ukázal, tu při této definici existují určité hodnoty q, při nichž všechny koeficienty příslušných Fourierových řad se stávají nekonečně velkými, vyjma koeficienty při $\cos nx$ a $\sin nx$. Stanovíme-li ale podmínku, aby

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_0^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{se}_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi;\ n \neq 0, \tag{6}$$

pak se opět pro $q = 0$ redukují funkce Mathieuovy na $\cos nx$ a $\sin nx$, ale pro dotyčné hodnoty q se koeficienty u $\sin nx$ a $\cos nx$ stávají rovné nule, kdežto ostatní koeficienty zůstávají konečnými.

Přirozeně se tu vyskytuje problém konvergence takto vzniklých rozvojů v řady funkcí Mathieuových.

Zajímavým problémem (R. S. Varma 1931) jsou vztahy mezi rozličnými Mathieuovými funkcemi a asymptotické rozvoje zejména funkcí Mathieuových druhého druhu.

Účelem této přednášky bylo upozorniti na teorii funkcí Mathieuových a na nové problémy tu se vyskytující.

Diferenciálne systémy s konstantnými koeficientmi.

J. Hronec, Brno.

Vezmime lin. dif. systém

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} y_\lambda, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

kde $a_{i\lambda}$ sú konstanty. Keď použijeme substitúcie $(y_{ik}) = (a_{ik})(\eta_{ik})$, $(\zeta_{ik}) = (\gamma_{ik})(\eta_{ik})$, $(z_{ik}) = (\gamma_{ik})(y_{ik})$, kde je $\|\gamma_{ik}\| \neq 0$, vtedy sú $(z_{ik}) = (b_{ik})(\zeta_{ik})$, $(b_{ik}) = (\gamma_{ik})(a_{ik})(\gamma_{ik})^{-1}$. Určíme-li γ_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ z lin. systémov

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \gamma_{i\lambda}(a_{\lambda k} - \delta_{\lambda k} r_i) = 0, \tag{2}$$

kde r_i sú korene charak. rovnice n-ho stupňa, vtedy je $(z_{ik}) = (\delta_{ik} r_i)(\zeta_{ik})$, kde je $\delta_{ik} = 1$ pri $i = k$ a zase je $\delta_{ik} = 0$ pri $i \neq k$. Použijeme-li lin. substitúciu

$$z_i = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{i\nu} y_\nu, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

kde $\gamma_{i\nu}$ určíme z(2), dostaneme tento k a n o n i c k ý tvar dif. systému