Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Miloš Kössler

Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 150–151

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121247

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1935

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

množství reálných čísel a $f(x) > 0$ pro $x > 0$. Označme $L_\varrho(M, f(x))$ pro $\varrho > 0$ dolní hranici [v širším smyslu] součtů $\sum\limits_v^V f[(v)]$ [(v) značí délku intervalu v], jestliže V probíhá všechna nejvýše spočetná množství otevřených intervalů pokrývající M a mající tu vlastnost, že každý interval těch množství má délku menší než ϱ. Pak existuje limita (v širším smyslu): $\lim\limits_{\varrho \to 0+0} L_\varrho(M, f(x))$, kterou označíme $L(M, f(x))$ (Hausdorffova míra množství M příslušná k funkci $f(x)$). Konečně uvedl přednášející tuto větu:

Budiž $0 < r < \frac{1}{2}$ a $\mathfrak{M}_r$ množství těch čísel Θ z intervalu $< 0, 1)$, pro která nerovnina $p(\Theta, n) < rn$ má nekonečně mnoho celých, kladných řešení v n. Pak $L(\mathfrak{M}_r, x^\alpha) = 0$ pro $\alpha > \frac{\log q(r)}{\log 2}$ a $L(\mathfrak{M}_r, x^\alpha) = \infty$ pro $\alpha < \frac{\log q(r)}{\log 2}$, kde $q(r) = \frac{1}{r^r\,(1-r)^{1-r}}$ (je tedy $0 < \frac{\log q(r)}{\log 2} < 1$).

Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginarteile.

M. Kössler, Praha.

Es sei

$$\mathfrak{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n \tag{1}$$

eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion deren, Imaginarteil $\mathfrak{J}\,\mathfrak{f}(z)$ daselbst die Eigenschaft

$$-b \leq \mathfrak{J}\,\mathfrak{f}(z) \leq \pi - b \tag{1a}$$

besitzt. Dabei sei $0 < b < \pi$. Solche Funktionen wollen wir als Funktionen der Klasse C bezeichnen. Das Koeffizientenproblem dieser Klasse ist durch folgende Sätze gelöst.

Satz I:

Es sei $\psi(\varphi)$ eine reelle Funktion höchstens der ersten Baireschen Klasse, welche in $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ definiert ist und die Eigenschaften

$$0 \leq \psi(\varphi) \leq \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \psi(\varphi)\,d\varphi = 2\pi b$$

besitzt. Dann gehört $\mathfrak{f}(z)$ zur Klasse C, wenn und nur wenn

$$\mathfrak{f}(z) = \frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(\varphi)\,d\varphi}{e^{i\varphi} - z},$$

d. h. wenn und nur wenn

$$A_n = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi)\, e^{-ni\varphi} d\varphi, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

Die Integrale sind Lebesgue-sche Integrale.

Satz II:

Die Funktion f(z) gehört zur Klasse C, wenn und nur wenn bei jedem gegebenen n die Koeffizienten in folgender Form dargestellt werden können

$$A_k = \frac{e^{ik\vartheta_n}}{k} \sum_{j=0}^{y} (e^{-ki\varphi_{2j}^{(n)}} - e^{-ki\varphi_{2j+1}^{(n)}}), \tag{3}$$

$$1 \leq k \leq n, \qquad 0 \leq y \leq n,$$

$$0 = \varphi_0^{(n)} < \varphi_1^{(n)} < \ldots < \varphi_{2y+1}^{(n)} < 2\pi,$$

$$(\varphi_1^{(n)} - \varphi_0^{(n)}) + (\varphi_3^{(n)} - \varphi_2^{(n)}) + \ldots + (\varphi^{(n)}_{2y+1} - \varphi^{(n)}_{2y}) = 2b.$$

Dabei sind ϑ_n, $\varphi_j^{(n)}$ und y von k unabhängige durch n bestimmte reelle Zahlen.

Die Sätze I und II sind äquivalent.

Les suites de polynômes et la représentation conforme.

F. Leja, Warszawa.

Soit D un domaine quelconque du plan complexe dont la frontière F est un continu connexe contenant au moins deux points différents. Je supposerai que le domaine D contienne le point à l'infini dans son intérieur.

Considérons $n + 1$ points différents quelconques

$$\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n \tag{1}$$

appartenant à la frontière F et formons le produit de tous les distances mutuelles entre les points (1):

$$V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \prod_{0 \leq j < k \leq n} |\zeta_j - \zeta_k|. \tag{2}$$

Cette fonction des points (1) atteint sur F un maximum (car l'ensemble F est, d'après l'hypothèse, fermé et borné). Soit V_n ce maximum et

$$\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n \tag{3}$$

les points de F en lesquels il est atteint. On a donc

$$V_n = V(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \max_{\text{sur } F} V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n).$$