Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Vrána

Základní úlohy o přímce v analytické geometrii. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 2, D1--D17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121227

PŘÍLOHA DIDAKTICKO-METODICKÁ.

ROČNÍK 7. (1931/32). ČÍSLO 1. a 2.

FRANTIŠEK VRÁNA:

Základní úlohy o přímce v analytické geometrii.

Základní úlohy analytické geometrie, jejichž přesné řešení metodou ryze analytickou zde podávám, zabývají se jednoduchými vztahy bodů, přímek a útvarů jimi stanovených. V těchto úlohách se žádá, aby se přesně určil

1. smysl stran přímky;
2. tvar normální rovnice přímky;
3. úhel dvou přímek;
4. úhly trojúhelníku;
5. vzdálenost bodu od přímky;
6. osy úhlů dvou přímek a
7. osy úhlů trojúhelníku.

Tyto úlohy jsou sice řešeny skoro všechny v každé středoškolské i vyšší učebnici analytické geometrie, ale způsob jejich řešení po stránce metodické a někdy i vědecké jeví stále ještě některé nedostatky.

Tyto nedostatky pociťovali zvláště učitelé analytické geometrie brzy po jejím zavedení do středních škol. O tom svědčí řada pojednání, obsažených ve výročních zprávách středních škol ve všech zemích bývalého Rakouska, i články uveřejněné v odborných časopisech,[1] věnovaných střednímu školství. V nich stěžují si odborníci, že jest ještě řada důležitých otázek, které jsou v učebnicích buď vůbec přehlíženy, aneb jsou zodpovídány jen málo postačujícím způsobem, v němž se nejeví obvyklá přesnost matematiky v jiných jejích oborech vždy patrná.

Analytická geometrie vyšetřuje vlastnosti geometrických útvarů pouze počtem užívajícím souřadnic bodů. Jejím hlavním nástrojem jest algebra, základní pojmy goniometrie a vyšší analysa. Konstrukce pravítkem a kružítkem jsou jí cizí, neboť nahrazuje útvary, které jsou předmětem jejího zkoumání, čísly a číselnými rovnicemi. *Nemá tudíž býti užíváno při odvozování jejích vět obrazců jako podstatné části řešení místo ke kontrole početních výsledků.* Zvláště lze vytknouti učebnicím po této stránce, že užívají někdy k dokazování obecně platných vět obrazců útvaru jen v jedné zvláštní poloze ležícího, ale odvozují z něho někdy i dosti povrchně vztahy obecně platné. Největší chybou však jest, když se volí obrazec pouze v I. čtvrti roviny os souřadnic ležící. Neboť tu není rozdílu mezi souřadnicemi kladnými a jejich prostými hodnotami a žák neuvědomuje si vůbec rozdílu mezi počítáním v planimetrii a v analytické geometrii. A jistě by se našlo málo žáků, kteří by dovedli opakovati důkaz pro útvar libovolně položený.

Dále se vytýká metodě v učebnicích, že užívá při svých důkazech pouček planimetrických nebo trigonometrických, ačkoli by měla užívati z planimetrie a trigonometrie jen jejich základních pojmů. Vždyť se má v analytické geometrii právě ukázati, že by bylo možno její ryze početní metodou odvoditi poučky planimetrické i řešiti úlohy trigonometrické.

Tedy na př. není ryze analytické odvozování vzdálenosti dvou bodů z věty Pythagorovy nebo trigonometrickým řešením příslušného trojúhelníku, nebo počítání obsahu trojúhelníku, jeho výšek a úhlů z vět planimetrických a trigonometrických.

Ale mnohem závažnější jest výtka další. V analytické geometrii objevuje se totiž zjev v jiných oborech matematiky neznámý. *Je to nepropracovanost a z toho plynoucí neurčitost jejích základních pojmů, které si každý autor definuje zcela libovolně a zavádí pak pro řešení úloh předpoklady, které nejsou opřeny o podstatu věci samé. Tyto předpoklady stojí často u různých autorů zcela proti sobě. Týká se to hlavně pojmu relativnosti délek, stran přímek a úhlů. Z toho pak vyplývají pro řešení úloh vzorce, které jsou neúplné, neurčité a které dokonce vypovídají v některých případech vůbec službu, jak v dalším bude ukázáno.*

Stesk na nepropracované základy analytické geometrie vyjádřil pěkným podobenstvím L. Ruzsinszki ve článku uveřejněném v XI. ročníku časopisu „Zeitschrift für das Realschulwesen“. Praví: „Jasnost pojmů a přesnost důkazů jsou hlavní vlastností matematiky. Proto nesmíme jich postrádati v žádném jejím oboru. Přihází-li se však, že některý obor matematiky ponechává si v tomto ohledu ještě něco přes to k doplnění, může se tento nedostatek vysvětliti buď tím, že jest tento obor ještě mlád a nedosti vyvinut, nebo z toho, že se stal bohatým dolem nálezů nových matematických pokladů, což má zpravidla za následek, že pracovníci jsou lákáni stále hlouběji a hlouběji k vydatnějším žilám a ponechávají vchody nevykořistěny státi. Tento poslední případ lze vhodně použíti na analytickou geometrii.“

Dále popisuje, jak se analytická geometrie vyvinula, až dosáhla svého vrcholu, a připojuje poznámku: „Na poli analytické geometrie nenastoupilo to, co bychom právem očekávali, totiž, že její pěstitelé, poněvadž se již dospělo ke konci anebo se aspoň tak zdálo, budou závoditi o vymýcení nejasností a dvojznačností snad ještě v základech se vyskytujících. Učenci vyšších kruhů pohybují se však ještě stále ve vyšších sférách analytické geometrie a nejasnosti v základech zůstávají a trvají dále jako dříve. A tu se přihází, že tyto zdánlivě bezvýznamné nejasnosti vedou k nesprávným důkazům, ba i k nesprávným výsledkům. To se vyskytuje nejen v učebnicích školských, ale i v dílech vědeckých, jejichž vědecká hodnota jest jinak nepochybná."

Tyto výtky byly uveřejněny sice již v roce 1886, ale bohužel jsou oprávněny ještě i dnes. Metody řešení základních úloh byly přejímány z jedné učebnice do druhé a dosáhly tím skoro již jakési sankce a povahy nedotknutelné oprávněnosti.

Nejstarší pojednání těchto otázek se týkající, pokud se mi podařilo nalézti, bylo uveřejněno ve výroční zprávě německého gymnasia v Brně r. 1879 od prof. Ondřeje Wretschka. Pak následovala celá řada článků ve výročních zprávách jiných ústavů a v odborných časopisech, uveřejněných v letech 80tých, 90tých atd. až do světové války. U nás se zabýval některými otázkami prof. Jan Sommer. Zabývají se tedy tímto tématem středoškolští učitelé již celé půlstoletí. A přece nebylo dosud dosaženo žádoucí jednoty v názorech na základní pojmy analytické geometrie.

I nová vydání našich školských učebnic analytické geometrie užívají metod, jimž lze vytýkati mnohé z toho, co bylo výše uvedeno. Také autor naší poslední vědecké učebnice univ. prof. B. Bydžovský dosvědčuje ve svém „Úvodu do analytické geometrie", že jsou dosud neurčitosti v samých základech analytické geometrie. Dílo toto znamená jak v metodě zpracování látky, tak i v obsahu věcném značný pokrok proti knize Studničkově. Přece však byl nucen autor na str. 44, kde se řeší úloha o vzdálenosti bodu od přímky, připojiti poznámku upozorňující na neúplnost řešení: „Toto pravidlo ztrácí význam pro přímku procházející počátkem. Tam lze však rozhodnouti o znaménku vzdálenosti, je-li toho třeba, jakkoliv." A ještě na str. 45 pod čarou v další poznámce praví: „Stanovení znaménka vzdálenosti leží v naší libovůli a lze o něm rozhodnouti také jinak, než jsme učinili. Na př., je-li přímka orientována, lze mluviti, představíme-li si pozorovatele hledícího v kladném smyslu přímky, o pravé a levé straně přímky, a pokládati pak vzdálenost bodů ležících na straně pravé na př. za kladnou, na opačné za zápornou." Jiní autoři volí smysl stran přímky právě naopak. Ale žádný autor neuvádí důvody své volby. Jak dále ukáži, nemá spojování smyslu přímky se smyslem jejích stran vůbec žádného oprávnění a nedá se souhlasně udržeti ani u osy x a y. Tyto poznámky uvádím jen jako doklad zmatků, které panují dosud v základech analytické geometrie.

Všechny tyto neurčitosti v řešení základních úloh mají svůj původ v relativnosti veličin, s nimiž analytická geometrie pracuje.

Již její základní pojmy, totiž souřadnice bodu v rovině, jsou bez výjimky relativní a jsou ode všech autorů souhlasně za takové považovány. Orientace os souřadnic jest ve všech učebnicích shodná. Není však takové shody již při dalších veličinách, které jest považovati nutně za relativní. Jsou to různé vzdálenosti, úhly a obsahy plošných útvarů.

Veličiny relativní jsou veličiny, které podle způsobu svého vzniku jsou k sobě v poměru additivním a subtraktivním. Abychom je od sebe rozlišovali i označením, volíme pro ně znaménka sečítání a odčítání, pokládajíce jedny za kladné a druhé za záporné. Přechází-li kladná veličina spojitě v zápornou nebo naopak záporná v kladnou, musí nutně projíti mezí, která je mezi nimi, to jest musí se státi při tomto přechodu její hodnota nulou. Ukáži v dalším, že učebnice nevyhovují tomuto požadavku při vzdálenosti bodu od přímky, když určují smysl stran přímky podle polohy počátku souřadnic. Proto je nutno každou volbu relativnosti prvků analytické geometrie náležitě odůvodniti a všechny libovolné předpoklady relativnosti pokud možno omeziti a říditi se tím, co jest dáno základními pojmy samými. Úplně libovolnou jest pouze orientace os. A přece i tato orientace os, jak se jí obecně užívá, jest odůvodněna aspoň analogií měření v jiných oborech. (Na př. měření na teploměru, směr způsobu našeho psaní a j.)

Budiž mi proto dovoleno podati návrh na jednotné a přesné řešení úloh sem spadajících, které by v každém případě podávalo bezpečný návod k výpočtům.

Strany přímky.

Přímka dělí rovinu, v níž leží, na dvě části, které nazýváme jejími stranami. A tu je zajímavé, že určitý tvar kterékoli rovnice přímky dodává těmto stranám určitý smysl. Dosazujeme-li do anulované rovnice přímky za proměnné souřadnice x a y hodnoty souřadnic bodů ležících na jedné straně přímky, obdržíme hodnoty kladné, kdežto souřadnice bodů, ležících na druhé straně přímky, dávají hodnoty záporné. Souřadnice bodů ležících na přímce dávají ovšem hodnotu rovnou nule. *Můžeme tedy této vlastnosti stran přímky užíti k rozlišování stran, když zvolíme tu stranu přímky za kladnou, na níž leží body, dávající pro trojčlen anulované rovnice přímky hodnoty kladné a druhou stranu označíme pak jako zápornou.* Hledejme nyní, která strana přímky jest v tomto smyslu kladná a která záporná. Při tom nebudeme činiti žádné nové předpoklady, jak upraviti anulovanou rovnici přímky, jak činí všichni autoři v učebnicích a v různých pojednáních o tomto předmětě. Obecná rovnice přímky kteréhokoli tvaru má totiž tři členy. Rovnici lze upraviti tak, že určitá konstanta její je kladná nebo záporná.

A tu je úprava rovnic u různých autorů různá. Jedni upravují rovnici tak, aby součinitel členu obsahujícího x měl určité, vždy stejné znaménko, jiní předpisují tak pro součinitele při y a opět jiní a to většinou určují pevně znaménko členu prostého.

Přidržme se však rovnice, kterou všichni užívají ve stejném tvaru. Jest to rovnice směrnicová

$$y = kx + q. \tag{1}$$

Zvolme kdekoliv nad přímkou bod $L\,(x_0, y_0)$ a spusťme z něho kolmici na osu x. Ta protne buď přímo nebo v prodloužení přímku v bodě $M\ (x_0, y_1)$, vyhovujícím rovnici

$$y_1 = kx_0 + q. \tag{2}$$

Pořadnice všech bodů ležících na horní straně přímky jsou však vždy větší než pořadnice bodů o téže úsečce ležících na přímce. Platí tedy pro ně nerovnost $y_0 > y_1$ čili $y_0 > kx_0 + q$. Anulujeme-li, obdržíme nerovnost

$$y_0 - kx_0 - q > 0. \tag{3}$$

Zvolíme-li však bod L na dolní straně přímky, kde je vždy $y_0 < y_1$, obdržíme stejným způsobem jako dříve nerovnost

$$y_0 - kx_0 - q < 0. \tag{4}$$

Vidíme tedy, že již sama orientace os souřadnic rozhoduje o relativnosti stran přímky v tom smyslu, že horní stranu přímky jest považovati za kladnou a dolní stranu za zápornou. Na smyslu přímky vůbec při tom nezáleží a proto jest spojování smyslu stran přímky se smyslem přímky zbytečné a ničím neodůvodněné. A přece se tak děje ve všech učebnicích i různých pojednáních, ačkoliv to vede ke zmatkům a dokonce i k nesprávným výsledkům.

Všimněme si ještě případu, kdy není možno přímku vyjádřiti rovnicí směrnicovou. To nastává při rovnoběžkách s osou y. Avšak i tu platí obdobný vztah bodů ku přímce. Rovnice přímky v tomto případě zní $x = p$.

Zvolme opět libovolný bod $L\ (x_0, y_0)$ ležící na pravé straně přímky a spusťme z něho kolmici na osu y, která protne přímku v bodě $M\ (x_1, y_0)$. Pro něj platí rovnice $x_1 = p$. Všechny body L ležící na pravé straně přímky mají $x_0 > x_1$ a proto platí nerovnost $x_0 > p$, čili $x_0 - p > 0$.

Obdobně nalezneme pro body ležící na levé straně přímky nerovnost $x_0 - p < 0$. *Můžeme tedy u rovnoběžek s osou y považovati jejich pravou stranu za kladnou a levou za zápornou.* Pak můžeme bez obrazce rozhodnouti z dané rovnice přímky a souřadnic bodů, na které straně přímky bod leží.

Při tomto výkladu nebylo třeba činiti žádné libovolné nové předpoklady o znaménku konstant rovnice přímky. Tu ponecháváme tvar rovnice tak, jak se ho všeobecně užívá. *Důležité jest však upozorniti na to, že ve směrnicové rovnici přímky jest vždy na levé straně anulované rovnice y kladné a v anulované rovnici rovnoběžky s osou y že jest x vždy kladné.*

Vyšetřme nyní, jak se jeví po této stránce obecný tvar rovnice přímky

$$Ax + By + C = 0. \tag{4}$$

Konstanty A, B, C mohou míti hodnotu kladnou nebo zápornou. Je-li opět bod $L\ (x_0, y_0)$ nad přímkou a $M\ (x_0, y_1)$ na přímce, platí

$$Ax_0 + By_1 + C = 0 \tag{5}$$

a

$$y_0 > y_1. \tag{6}$$

Násobme nerovnost (6) součinitelem B. Tím obdržíme nerovnost

$$By_0 \gtrless By_1 \tag{7}$$

podle toho, je-li $B \gtrless 0$.

Sečteme-li rovnici (5) s nerovností (7), obdržíme nerovnost

$$Ax_0 + By_0 + C \gtrless 0. \tag{8}$$

Jest tedy obecně hodnota trojčlenu anulované obecné rovnice přímky s dosazenými souřadnicemi daného bodu ležícího nad přímkou kladná nebo záporná podle toho, je-li součinitel y-ového členu kladný nebo záporný. Pro bod ležící pod přímkou obdržíme hodnotu protivného znaménka. Nevede tedy obecný tvar rovnice přímky sám o sobě ke stanovení určité relativnosti jejích stran. A přece změna tvaru rovnice přímky nemá za následek změnu polohy přímky, na níž jedině může relativnost jejích stran záviseti. Tuto relativnost chceme však míti zcela určitě stanovenu a proto musíme si stanoviti určitě i tvar rovnice přímky, pokud se týče znamének jejích členů. A tak také různí autoři činí různé předpoklady pro úpravu rovnice přímky, avšak bez zřetele k tomu, aby relativnost stran byla v souhlasu s relativností jiných prvků analytické geometrie. *Aby nastala úplná shoda s relativností stran přímky určenou dříve ze směrnicového tvaru přímky, jest třeba upraviti obecný tvar rovnice přímky tak, aby součinitel při y byl kladný.* Totéž jest učiniti i v každém jiném tvaru rovnice.

Trojčlen $y_0 - kx_0 - q$ má však ještě další a to důležitý význam při určování smyslu vzdálenosti bodu od přímky. Na něm právě lze založiti smysl této vzdálenosti ve shodě se smyslem stran přímky právě vyloženým. Tuto souvislost dokážeme, spustíme-li z bodu L kolmici na přímku. Je-li pata této kolmice L_1, jest L_1L vzdálenost bodu L od dané přímky. Z pravoúhlého trojúhelníku LL_1M však plyne, že $L_1L = ML \cos\beta$, kde značí β úhel při L, který jest vždy ostrý a proto $\cos\beta$ vždy kladný. Avšak $ML = y_0 - y_1 = y_0 - kx_0 - q$, předpokládáme-li rovnici přímky ve tvaru směrnicovém. Proto jest vzdálenost $L_1L = (y_0 - kx_0 - - q) \cos \beta$ závislá smyslem pouze na hodnotě výrazu $(y_0 - kx_0 - q)$. Ten jest však, jak jsme dokázali, kladný pro body ležící nad přímkou a záporný pro body ležící pod přímkou. Úhel β jest buď roven odchylce přímky od osy x nebo jest jejím výplňkem, poněvadž ramena obou úhlů stojí na sobě kolmo. Jest tedy $\cos \beta = \pm \cos \alpha$ podle toho, je-li $\alpha \lesseqgtr R$. Je-li směrnice přímky $\operatorname{tg} \alpha = k$, jest $\cos \alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + k^2}}$ a $\cos \beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 + k^2}}$ vždy kladný.

Vzdálenost bodu od přímky jest tedy dána výrazem

$$L_1L = \frac{y_0 - kx_0 - q}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Odvodili jsme vzdálenost bodu od přímky bez normální rovnice přímky, které se k tomu účelu vždy užívá. Ale toto odvození není ryze analytické. To ukážeme až v odstavci dalším.

Normální rovnice přímky.

Ve tvaru normální rovnice přímky panuje největší rozmanitost. Rovnice jednotlivých autorů liší se od sebe nejen v určovacích prvcích, jimiž jest poloha přímky určena a které se jeví v rovnici jako její konstanty, nýbrž i v úpravě znaménka jedné z těchto konstant. Poloha přímky určuje se v normální rovnici vzdáleností přímky od počátku soustavy souřadnic O čili normálou n a dále buď odchylkou této normály od jedné nebo i od obou os souřadnic aneb odchylkou přímky samé od osy x. Normála považuje se pravidelně za prostou délku a odchylka její φ od osy x volí se pak v mezích 0^0 až 360^0. V tom však právě není důslednosti, když pro odchylku $\varphi = 0^0$ a $\varphi = 180^0$ (nebo $\varphi = 90^0$ a $\varphi = 270^0$), tedy pro směry protivné v téže přímce (ose x nebo y) volí se délka normály souhlasného smyslu, ačkoli pro úsečky bodů nebo pořadnice bodů do týchž směrů od počátku O spadající volí se správně jednou hodnota kladná a po druhé záporná. Podobně jest tomu i při ostatních odchylkách φ lišících se od sebe o 180^0. A přece základní vlastnost prvků analytické geometrie jest jejich relativnost.

Proto přesněji a v úplném souhlasu s předpoklady dříve učiněnými volíme pro normály směřující nad osu x (včetně normály splývající s osou $+ x$) hodnoty kladné a pro normály směřující pod osu x (včetně normály splývající s osou $- x$) hodnoty záporné. Pro odchylku normály od kladného směru osy x volíme odchylku přímky, do níž normála spadá. Proto bude vždy odchylka normály φ v mezích 0^0 až 180^0, a to ve smyslu kladném.

Samozřejmý důsledek tohoto předpokladu jest pak určitá úprava tvaru normální rovnice přímky. Tu není již nic neurčitého a libovolného. *Proto normální rovnice přímky ve tvaru v našich učebnicích užívaném*

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - n = 0$$

musí býti vždy upravena tak, aby člen obsahující y byl kladný. Neboť sin φ při zvolených mezích pro φ jest nutně kladný. Člen obsahující x může býti kladný nebo záporný podle toho, je-li φ menší nebo větší než R. Třetí člen rovnice jest záporný pro normály kladné a kladný pro normály záporné.

Tato úprava normální rovnice jest v úplném souhlasu se smyslem úseček i se smyslem stran přímky dříve zavedeným. Je-li upraviti obecnou rovnici přímky $Ax + By + C = 0$ na tvar normální, postupujeme takto: V rovnici jsou A, B čísla celá, která nemohou býti ani kosinem ani sinem odchylky normály od osy x. Abychom tyto koeficienty převedli na žádané funkce goniometrické, jest nutno děliti celou rovnici číslem $\varkappa$, jistě větším než A i B. Tím se promění daná rovnice v rovnici

$$\frac{A}{\varkappa} x + \frac{B}{\varkappa} y + \frac{C}{\varkappa} = 0.$$

Podle podmínky dané normálním tvarem rovnice přímky musí býti

$$\frac{A}{\varkappa} = \cos \varphi, \quad \frac{B}{\varkappa} = \sin \varphi \text{ a } \frac{C}{\varkappa} = -n,$$

z čehož známým obratem obdržíme pro $\varkappa$ hodnotu

$$\varkappa = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$$

a rovnici normální ve tvaru

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Volba znaménka při odmocnině řídí se znaménkem koeficientu B tak, že volíme znaménko odmocniny souhlasné se znaménkem při B, poněvadž $\sin \varphi = \dfrac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$ *musí býti kladný.*

Úhel dvou přímek.

Obě naše středoškolské učebnice analytické geometrie řeší úhel dvou přímek z obrazce dvou přímek s průsečíkem v I. čtvrti roviny na základě známé věty planimetrické o vnějším úhlu trojúhelníku. Toto odvozování založené na zvláštní poloze dvou přímek postrádá předně přesvědčivosti důkazu o obecné platnosti odvozeného vzorce a není ryze analytické, opírajíc se o poučku planimetrickou. Kromě toho nepřihlíží se tu vůbec ke smyslu počítaného úhlu, který se označuje prostě α nebo φ. V učebnici Vojtěchově se praví, že úhel obou přímek rovná se buď $\varphi_2 - \varphi_1$ nebo $\varphi_1 - \varphi_2$, ač z obrazce plyne jen rozdíl první, a dále se pokračuje: pišme „třebas" $\varphi_2 - \varphi_1$, což jest podle obrazce jedině správné a nikoli libovolné. Podobně, ale přesně podle obrazce odvozuje i Vinš výsledný vzorec ve tvaru $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Tento způsob odvození vzorce jest však správný jen pro určitý úhel v příslušném obrazci, jehož obě ramena protínají osu x, což není vůbec poznamenáno, a vzorec se uvádí jako obecně platný a nepraví se nic o tom, které rameno jest považovati za první a které za druhé. Oba autoři připojují vzorec pro úhel vedlejší. Vzorce v tomto tvaru jsou zcela neurčité a nejsou žáku spolehlivým vodítkem při řešení některých úloh sem náležejících. Jest na př. vésti daným bodem přímku, která svírá se dvěma danými přímkami stejné úhly. Žák podle vzorce v učebnici řešil by úlohu asi takto: Jsou-li směrnice daných přímek k_1 a k_2 a směrnice hledané přímky k, musí býti vyhověno rovnici $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$ čili

$$\frac{k - k_1}{1 + k_1 k} = \frac{k - k_2}{1 + k_2 k}.$$

Ta ho však k jeho úžasu přivede k rovnici $k^2 = -1$, z níž plyne řešení imaginární. K takovým výsledkům může vésti neúplnost a neurčitost vzorce, v němž se prostě označí úhel α, v čemž není patrný ani smysl úhlu, ani který úhel dvou přímek se tím míní. Další doklad neurčitosti a nespolehlivosti tohoto vzorce jest i způsob řešení, jímž oba autoři řeší úlohu: Napsati jest rovnici přímky, jež jde daným bodem (x_1, y_1) a svírá daný úhel φ s danou přímkou $y = kx + q$.

Kdyby měl žák samostatně řešiti tuto úlohu, užil by vzorce v učebnici uvedeného a obdržel by jen jedno řešení, ačkoliv z jednoduchého názoru vyplývají přímky dvě. Vinš řeší tuto úlohu tak, že užívá jednou vzorce pro daný úhel φ, což dá jedno řešení, a pak ještě vzorce pro úhel výplňkový k danému φ, ale beze vší poznámky, proč volí po druhé místo daného úhlu jeho výplněk, o němž se v úloze nemluví. A zajímavé po stránce didaktické jest řešení Vojtěchovo. Autor upustil vůbec od svého vzorce pro úhel dvou přímek před touto úlohou právě odvozeného a řeší úlohu pomocí vzorců pro součet a rozdíl dvou úhlů známých z goniometrie. V téže učebnici řeší se ještě v odstavci o kružnici další úloha sem náležející: Jest vyšetřiti geometrické místo bodů, z nichž vidíme pevnou úsečku ve stálém úhlu (určitého smyslu). Tu užívá autor vzorce odvozeného pro úhel dvou přímek a dostává jako výsledek jedinou kružnici, ač úloha je dvojznačná. Autor měl snad na mysli tuto možnou výtku, poněvadž připojuje v závorce uvedenou poznámku, ale zapomněl, že užitý vzorec odvodil pro úhel bez ohledu na jeho smysl a také ten smysl blíže neurčuje. Kromě toho vyžaduje výsledek řešení bližšího rozboru, poněvadž celá kružnice není hledaným geometrickým místem. Na tento rozbor ovšem neurčitý vzorec pro úhel dvou přímek nestačí. Dále nelze s jistotou bez obrazce tímto vzorcem řešiti úlohy, v nichž jest určiti úhel zcela určitý, na př. zorný úhel, v němž jest viděti z daného bodu danou křivku.

Tyto uvedené nedostatky řešení lze však snadno odstraniti, provedeme-li podrobnější rozbor této základní úlohy.

Dvě přímky p_1 a p_2 tvoří spolu čtyři úhly, z nichž dva a dva vrcholové jsou stejné a vedlejší jsou výplňkové. Jen tehdy, jedná-li se pouze o velikost jejich bez ohledu na jejich polohu, stačí určiti kterýkoli z nich. Jsou-li dané přímky p_1 a p_2 v poloze obecné dány rovnicemi

$$y = k_1x + q_1 \quad \text{a} \quad y = k_2x + q_2, \tag{1}$$

převedeme je transformací souřadnic na přímky procházející počátkem. Za tím účelem posuneme soustavu os souřadnic rovnoběžně tak, aby průsečík přímek $P\,(x_1, y_1)$ se stal novým počátkem. Transformační rovnice jsou

$$x = x' + x_1 \text{ a } y = y' + y_1. \tag{2}$$

Budou pak rovnice obou přímek v nové soustavě ve tvaru

$$y' + y_1 = k_1x' + k_1x_1 + q_1 \text{ a } y' + y_1 = k_2x' + k_2x_1 + q_2. \tag{3}$$

Poněvadž souřadnice průsečíku P vyhovují rovnicím (1), platí rovnice

$$y_1 = k_1x_1 + q_1 \text{ a } y_1 = k_2x_1 + q_2. \tag{4}$$

Vzhledem k tomu promění se rovnice (3) v jednoduchý tvar

$$y' = k_1x' \text{ a } y' = k_2x'. \tag{5}$$

Z nich je patrno, že se transformací souřadnic nezměnily směrnice přímek. Může se tedy řešení úhlů dvou přímek omeziti pouze na přímky procházející počátkem. Úhly ty jsou závislé na odchylkách obou přímek od kladné poloosy x, které jsou jednoznačně určeny směrnicí přímky, *stanovíme-li jako zásadu, že odchylka přímky jako celku jest určena kladným dutým úhlem. Stejně pro úhly dvou přímek volíme vždy jen smysl kladný a velikost v mezích dutého úhlu. Pak jest vždy jedna dvojice vrcholových úhlů dvou přímek dána úhlem s pořadím ramen* $\widehat{p_1p_2}$ *a druhá s pořadím* $\widehat{p_2p_1}$, *o nichž platí rovnice*

$$\widehat{p_1p_2} + \widehat{p_2p_1} = 2R.$$

Tyto úhly obdržíme snadno z rovnic

$$\widehat{xp_1} + \widehat{p_1p_2} = \widehat{xp_2} \text{ a } \widehat{xp_2} + \widehat{p_2p_1} = \widehat{xp_1}, \tag{6}$$

z nichž plynou pro hledané úhly rovnice

$$\widehat{p_1p_2} = \widehat{xp_2} - \widehat{xp_1} \text{ a } \widehat{p_2p_1} = \widehat{xp_1} - \widehat{xp_2}. \tag{7}$$

Z nich obdržíme známé vzorce

$$\operatorname{tg} \widehat{p_1p_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \text{ a } \operatorname{tg} \widehat{p_2p_1} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}. \tag{8}$$

Při tom značí $\widehat{p_1p_2}$ zcela přesně dva vrcholové úhly, které vzniknou otočením přímky p_1 v kladném smyslu do polohy p_2 a $\widehat{p_2p_1}$ dva úhly vrcholové k předešlým vedlejší, které vzniknou otočením přímky p_2 v kladném smyslu do polohy p_1. Otáčení přímek děje se kolem jejich průsečíku. *Pro výpočet stačí pro oba případy vzorec první v rovnici* (8), *pamatujeme-li, že v čitateli zlomku, vyjadřujícího tangentu úhlu dvou přímek, jest pořadí směrnic daných přímek vždy opačné než je pořadí ramen čteného úhlu.*

Úlohu tuto můžeme řešiti ryze analyticky transformací souřadnic otočením os souřadnic tak, aby přímka p_1 se stala osou x' v nové soustavě. Pak odchylka přímky p_2 v nové soustavě, daná její směrnicí, jest hledaným úhlem $\widehat{p_1p_2}$.

Předpokládejme rovnice přímek ve tvaru

$$y = k_1x \quad \text{a} \quad y = k_2x. \tag{9}$$

Otočíme-li osy souřadnic o úhel rovný odchylce přímky p_1, jsou transformační rovnice

$$x = x' \cos \alpha_1 - y' \sin \alpha_1 \text{ a } y = x' \sin \alpha_1 + y' \cos \alpha_1. \tag{10}$$

Vzhledem k tomu, že $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, jest

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + k_1^2}} \text{ a } \sin \alpha_1 = \frac{k_1}{\pm \sqrt{1 + k_1^2}}. \tag{11}$$

Při tom jest znaménko odmocniny voliti souhlasně se znaménkem směrnice k_1. Vložíme-li tyto hodnoty do rovnic (10) a výrazy takto získané do rovnic (9), obdržíme po úpravě rovnice přímek p_1 a p_2 v otočené soustavě ve tvaru

$$y' = 0 \text{ a } y' = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} x. \tag{12}$$

Z toho plyne pro úhel $\widehat{p_1p_2}$ rovnice

$$\operatorname{tg} \widehat{p_1p_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \tag{13}$$

jako dříve. Při tomto způsobu řešení nebylo třeba vůbec obrazce a mimo to odvodili jsme analytickou cestou známý goniometrický vzorec pro tangentu rozdílu dvou úhlů, který dřívější způsob řešení musil předpokládati jako známý.

Chceme-li určiti přímo jen ostrý nebo tupý úhel dvou přímek, můžeme bez obrazce postupovati takto: Jsou-li směrnice obou přímek kladné nebo obě záporné, jest úhel ostrý dán vždy pořadím ramen $\widehat{p_1 p_2}$, kde značí p_1 přímku s menší odchylkou, a tupý pořadím $\widehat{p_2 p_1}$. Jsou-li směrnice různých znamének, volíme kladnou za k_1 a zápornou za k_2. Pak je čitatel zlomku v rovnici (13) záporný. Aby tedy tg $\widehat{p_1 p_2}$ byla kladná, musí býti $1 + k_1 k_2$ hodnota záporná čili $|k_1 k_2| > 1$. Stejnou úvahou nalezneme, že pro úhel $\widehat{p_1 p_2}$ tupý musí býti prostá hodnota $|k_1 k_2| < 1$. Chceme-li tedy přímo určiti ostrý nebo tupý úhel dvou přímek v případě směrnic protivného smyslu, jest třeba určiti prostou hodnotu součinu obou směrnic. Je-li větší než jedna, jest ostrý úhel dán úhlem $\widehat{p_1 p_2}$ a tupý $\widehat{p_2 p_1}$. Je-li však menší než jedna, jest tupý úhel dán pořadím $\widehat{p_1 p_2}$ a ostrý $\widehat{p_2 p_1}$.

Uvedeme nyní přesné řešení úloh na počátku tohoto odstavce uvedených.

1. Jest určiti přímku p, jdoucí daným bodem A (x_1, y_1), která svírá se dvěma danými přímkami p_1 a p_2 stejné úhly.

Rovnice daných přímek p_1 a p_2 jsou ve tvaru směrnicovém

$$y = k_1 x + q_1, \quad y = k_2 x + q_2.$$

Rovnice přímky p má tvar

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Směrnici k určíme z podmínky, že hledaná přímka a dané přímky svírají spolu kladné úhly s pořadím ramen buď $\widehat{p p_1}$, $\widehat{p_1 p_2}$ a $\widehat{p_2 p}$ nebo $\widehat{p p_2}$, $\widehat{p_2 p_1}$ a $\widehat{p_1 p}$. Platí tedy rovnice

$$\operatorname{tg} \widehat{p p_1} = \operatorname{tg} \widehat{p_2 p} \text{ nebo } \operatorname{tg} \widehat{p p_2} = \operatorname{tg} \widehat{p_1 p},$$

které vyjádřeny směrnicemi přímek vedou obě k jediné rovnici

$$\frac{k_1 - k}{1 + k_1 k} = \frac{k - k_2}{1 + k_2 k},$$

z níž plyne dále po úpravě rovnice

$$(k_1 + k_2) k^2 - 2(1 - k_1 k_2) k - (k_1 + k_2) = 0.$$

Z ní plynou pro k dvě záporně zvratné hodnoty. Jsou tedy hledané přímky dvě k sobě kolmé.

2. Jest určiti rovnici přímky, jež jde daným bodem (x_1, y_1) a svírá daný úhel γ s danou přímkou $p \equiv y = kx + q$.

Daný úhel kladného smyslu, který svírá hledaná přímka p' s přímkou danou, může míti pořadí ramen buď $\widehat{pp'}$ nebo $\widehat{p'p}$. Proto platí buď

$$\operatorname{tg} \widehat{pp'} = \frac{k' - k}{1 - kk'} = \operatorname{tg} \gamma$$

nebo

$$\operatorname{tg} \widehat{p'p} = \frac{k - k'}{1 + kk'} = \operatorname{tg} \gamma.$$

Z každé rovnice obdržíme jednu hodnotu pro k'. Jsou tedy hledané přímky dvě.

3. Jest vyšetřiti geometrické místo bodů, z nichž vidíme pevnou úsečku ve stálém úhlu γ.

Zvolme danou úsečku $AB = 2a$ za osu x a její střed za počátek soustavy souřadnic. Bude tedy bod A dán souřadnicemi $(-a, 0)$ a B souřadnicemi $(a, 0)$ a hledaný bod C souřadnicemi (x, y). Označíme-li p_1 rameno úhlu γ procházející bodem A a p_2 rameno procházející bodem B, bude úhel γ kladného smyslu dán pořadím ramen buď $\widehat{p_1p_2}$ nebo $\widehat{p_2p_1}$. Směrnice ramen jsou

$$k_1 = \frac{y}{x + a} \quad \text{a} \quad k_2 = \frac{y}{x - a}. \tag{1}$$

Platí tedy rovnice

$$\operatorname{tg} \widehat{p_1p_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \operatorname{tg} \gamma \tag{2}$$

nebo

$$\operatorname{tg} \widehat{p_2p_1} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} = \operatorname{tg} \gamma. \tag{3}$$

Dosadíme-li za k_1 a k_2 příslušné hodnoty z rovnic (1), obdržíme z rovnice (2) po úpravě rovnici geometrického místa ve tvaru

$$x^2 + (y - a \operatorname{cotg} \gamma)^2 = \left(\frac{a}{\sin \gamma}\right)^2 \tag{4}$$

a z rovnice (3) rovnici

$$x^2 + (y + a \operatorname{cotg} \gamma)^2 = \left(\frac{a}{\sin \gamma}\right)^2. \tag{5}$$

Rovnice ty značí kružnice o poloměru $r = \dfrac{a}{\sin \gamma}$ se středy v bodech

$$S_1\,(0, a \operatorname{ctg}\gamma) \text{ a } S_2\,(0, -a \operatorname{cotg} \gamma).$$

Tyto výsledky vyžadují však ještě dalšího rozboru, chceme-li je uvésti v souhlas s výsledky řešení planimetrického, které uvádí jako výsledek pouze určité oblouky těchto kružnic. O tom však Vojtěchova učebnice nic nepoznamenává. Přesný rozbor této úlohy zabral by však více místa a proto jej zde nemohu podati.

Úhly trojúhelníku a mnohoúhelníku.

Úhly trojúhelníku počítají se z odchylek jeho stran od osy x. Přesné řešení této úlohy činí autorům učebnic některé potíže. I naše učebnice jsou toho dokladem. Prof. Vojtěch řeší úlohu podle obrazce trojúhelníku ve zvláštní poloze tak, že určuje jeden vnitřní úhel trojúhelníku ze známé poučky o vztahu vnějšího úhlu trojúhelníku k úhlům vnitřním protějším, který jediný lze takto určiti, a o dalších praví: „Cyklickou záměnou obdržíme atd.“ Ale ta cyklická záměna není naprosto z obrazce patrna a není ani pro úhly samé správna. Proto toto řešení není uspokojující a přesvědčující o správnosti odvozených vzorců. Kromě toho jest podle autora před vlastním řešením úlohy rozhodnouti, je-li trojúhelník smyslu kladného nebo záporného, aby se mohla určiti příslušná cyklická záměna směrnic ve vzorcích pro tangenty počítaných úhlů. To však je při této úloze zcela zbytečné. Vinš tuto úlohu vůbec neřeší, ačkoliv ve cvičeních ji potřebuje. A přece vzorec pro úhel dvou přímek sám o sobě nijak nestačí pro řešení úhlu trojúhelníku bez obrazce. Tuto úlohu lze řešiti zcela přesně v každém případě a bez obrazce takto. Pošineme soustavu os souřadnic tak, aby počátek přišel do jednoho vrcholu. Tím se, jak bylo již ukázáno, nezmění žádné úhly přímek. Můžeme tedy výpočet úhlů trojúhelníku převésti vždy na výpočet úhlů přímek rovnoběžných se stranami daného trojúhelníku a procházejících počátkem O. Tyto tři přímky svírají spolu úhly rovné jednak vnitřním úhlům trojúhelníku a jednak úhlům vnějším. Vnitřní úhly jeví se při kterékoli z nich vedle sebe jako úhly stýkavé, dávající součet 180^0 a jejich úhly vedlejší, jevící se jako úhly stýkavé dávající součet 360^0, udávají úhly vnější. *Podle směrnic stran daného trojúhelníku rozhodneme snadno, která strana jeho má od osy x odchylku nejmenší a označíme ji s_1. Více odchýlenou stranu označíme s_2 a stranu nejvíce odchýlenou s_3. Zvolme jako základní přímku nejméně odchýlenou s_1. Pak jsou vždy úhly vnitřní kladného smyslu dány úhly $\widehat{s_1 s_2}$, $\widehat{s_2 s_3}$* a $\widehat{s_3 s_1}$. Stejně bychom je obdrželi při přímce s_2 nebo s_3. *Jejich úhly vedlejší $\widehat{s_1 s_3}$, $\widehat{s_3 s_2}$* a *$\widehat{s_2 s_1}$ jsou tedy úhly vnější.* Při tom jest smysl trojúhelníku zcela lhostejný. Podle známého vzorce pro úhel dvou přímek obdržíme pak úhly vnitřní z rovnic

$$\operatorname{tg} \widehat{s_1 s_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad \operatorname{tg} \widehat{s_2 s_3} = \frac{k_3 - k_2}{1 + k_2 k_3}, \quad \operatorname{tg} \widehat{s_3 s_1} = \frac{k_1 - k_3}{1 + k_1 k_3}$$

a vnější z rovnic

$$\operatorname{tg} \widehat{s_1 s_3} = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}, \quad \operatorname{tg} \widehat{s_3 s_2} = \frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}, \quad \operatorname{tg} \widehat{s_2 s_1} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Tímto způsobem jest možno vypočítati kterýkoliv jednotlivý úhel vnitřní nebo vnější.

Má se na př. vypočítati v trojúhelníku ABC pouze úhel β. Podle obvyklého označení jest úhel β sevřen stranami AB a BC. Určíme předně podle směrnic stran, která jest s_1, s_2 a s_3. Je-li na př. $AB \equiv s_1$ a $BC \equiv s_3$, víme ihned, že $\beta = \widehat{s_3 s_1}$ a $\beta' = \widehat{s_1 s_3}$.

Zvláště vhodný jest tento způsob, má-li se určiti zorný úhel, v němž jest viděti danou křivku z daného bodu P. Tu jest určiti pouze směrnice tečen z bodu P ke křivce vedených a směrnici dotykové sečny a počítati žádaný úhel jako vnitřní úhel trojúhelníku, stanoveného bodem P a styčnými body obou tečen, ležící při vrcholu P. Pro tuto úlohu nepodávají učebnice pro žáka vůbec žádného návodu, takže je nucen užívati k řešení obrazce, aby poznal, jak jest úhel žádaný určen. Podobně jest si vésti i při jiných úlohách, kde smysl úlohy vyžaduje určení úhlu dvou přímek zcela určitého ze čtyř možných.

Úhly mnohoúhelníku určí se jako vnitřní nebo vnější úhly trojúhelníků, které od mnohoúhelníku odděluje úhlopříčka, spojující konce dvou sousedních stran. Je-li mnohoúhelník dán pořadím vrcholů $ABCD \ldots MN$, jsou trojúhelníky ty ABC, BCD, $CDE, \ldots, MNA$, NAB. V každém z nich určí se pouze úhel při vrcholu středním a to buď vnitřní nebo vnější podle uvedeného způsobu. Tak obdržíme po sobě úhly vnitřní $\beta, \gamma, \delta, \ldots, \nu$ a α nebo vnější $\beta', \gamma', \delta', \ldots, \nu'$ a α'.

Vzdálenost bodu od přímky.

S úpravou normální rovnice přímky úzce souvisí výpočet vzdálenosti bodu od přímky. Tu jest právě taková rozmanitost způsobu řešení. Tuto úlohu řeší všichni autoři učebnic dosti složitým způsobem vždy podle obrazce určitého případu, jehož známý výsledek zobecňují. Ukázal jsem již v odstavci jednajícím o stranách přímky, jak lze řešiti vzdálenost bodu od přímky i bez normální rovnice, kterou někteří učitelé jako složitou odmítají z učiva středoškolského. Jest však při tomto způsobu užíti částečně trigonometrie. Ryze analyticky bez obrazce a zcela obecně lze řešiti tuto úlohu prostým pošinutím os souřadnic tak, aby daný bod stal se počátkem nové soustavy. Budiž dána přímka normální rovnicí

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - n = 0 \tag{1}$$

a bod $P(x_0, y_0)$. Transformace souřadnic provede se rovnicemi

$$x = x' + x_0 \quad \text{a} \quad y = y' + y_0. \tag{2}$$

Tím obdržíme pro přímku rovnici v nové soustavě ve tvaru

$$x' \cos\varphi + y' \sin\varphi + (x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - n) = 0, \tag{3}$$

což jest opět tvar normální. Proto prostý člen této rovnice

$$x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - n$$

znamená vzdálenost přímky dané od nového počátku pošinuté soustavy os s opačným znaménkem. To jest však vzdálenost přímky dané od daného bodu P. *Proto vzdálenost bodu P od přímky, jsouc smyslu protivného, jest dána přímo prostým členem nové normální rovnice. Jest tedy*

$$d = x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - n. \tag{4}$$

V učebnicích uvádí se tento vzorec též se znaménkem minus, což souvisí s předpokladem, že se za kladnou stranu přímky považuje ta strana, na níž leží počátek soustavy souřadnic. Tak činí i prof. Bydžovský, jak bylo již dříve uvedeno v úvodě. Tím však vylučuje se celý svazek přímek procházejících počátkem, o nichž nám nedává tedy vzorec žádnou direktivu, jak si při řešení úlohy máme vésti. A přece jest nutno rozhodnouti smysl této vzdálenosti při další úloze o symetrále úhlu dvou přímek a úhlů trojúhelníku. Ukáži v dalším, že tento nedostatek řešení vedl nejen v učebnicích školských, ale i v dílech vědeckých k nesprávným výsledkům řešených v nich úloh.

Jiná námitka proti určování smyslu stran přímek podle polohy počátku jest přetržitost vzdálenosti bodu od přímky, která se objeví, měníme-li spojitě tuto vzdálenost tím, že pošinujeme přímku rovnoběžně směrem k danému bodu. Mysleme si, že bod P jest na téže straně jako počátek, ale ve větší vzdálenosti než O. Má tedy bod P určitou kladnou vzdálenost od přímky p. Pošinujeme-li přímku rovnoběžně směrem k bodu P, vzdálenost se zmenšuje, jsouc stále kladná. Prochází-li přímka počátkem O, nevíme, jaká ta vzdálenost je. Pošinujeme-li přímku ještě týmž směrem dále, stává se náhle vzdálenost bodu P zápornou, aniž prošla hodnotou nulovou, stane se nulou, prochází-li bodem P samým, ale je pak dále zase kladnou.

Mimo to není přirozené, že body na téže straně rovnoběžných přímek mají od některých rovnoběžek vzdálenost kladnou a od jiných zápornou. *Z rovnice (4) plyne, že vzdálenost bodu od přímky jest kladná nebo záporná podle toho, je-li hodnota trojčlenu anulované normální rovnice přímky s dosazenými souřadnicemi bodu kladná nebo záporná. Kladná je však pro body ležící nad přímkou, k nimž* *tedy od přímky přicházíme směrem vzhůru, a záporná pro body ležící pod přímkou, k nimž tedy od přímky přicházíme směrem dolů.*

Proto můžeme i šikmé úsečce AB dávati smysl kladný nebo záporný podle toho, děje-li se postup z A do B směrem vzhůru nebo dolů. Má se tedy při počítání vzdálenosti dvou bodů podle vzorce

$$AB = \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{5}$$

připojiti znaménko + nebo — a to shodně se znaménkem rozdílu $(y_2 - y_1)$. *Pro rovnoběžky s osou y platí analogicky, že vzdálenosti bodů na pravé její straně ležících jsou kladné a na levé straně ležících záporné.* (Dokončení.)

EMIL MOTL:

Rozvodná deska fysikálních sbírek státní reálky v Kostelci nad Orlicí.

V roce 1929 vypsána byla soutěž na dodání rozvodné elektrické desky pro státní reálku v Kostelci n. Orlicí; této soutěže zúčastnila se též firma Jaroslav Vadas v Pardubicích, u níž jsem zaměstnán. Bylo tudíž mou úlohou konstruovati pro soutěž návrh desky. Za základ musel jsem ovšem vzíti předepsanou normální desku, ale provedl jsem na ní některá zlepšení. Firma Vadas v soutěži zvítězila, tedy má zlepšení byla uznána, a proto myslím, že nebude na škodu, budu-li tuto krátce o této desce referovati.

Celé zařízení se skládá z těchto částí: 1. motorgenerátoru, postaveného na podlaze fys. kabinetu, 2. jednofázového transformátoru umístěného tamtéž, 3. dvojdesky ve fysikální posluchárně, 4. svorkovnice k odběru potřebného proudu na experimentálním stole v posluchárně a 5. vypinače ve fys. kabinetě.

Motorgenerátor skládá se z: 1. třífázového asynchronního elektromotoru, 2. stejnosměrného generátoru a 3. stejnosměrného budiče. Tyto přístroje jsou namontovány na společné desce.

Elektromotor s kotvou na krátko má výkonnost 2350 wattů (asi 3 HP) při 1410 obrátkách pro napětí 220—380 voltů a frekvenci 50. Naším zařízením možno k experimentálním účelům odebírati buď proud jednosměrný, neb střídavý jednofázový, neb střídavý třífázový. Aby se mohl odebírati proud jednosměrný, elektromotor jest spojen pružnou spojkou s generátorem na stejnosměrný proud (1) výkonnosti 1620 wattů při 1410 obrátkách, 60 voltech a 27 amp. Ke změně napětí generátoru v mezích od 0—60 voltů je magnetický kruh od generátoru odpojen a napájen