František Josef Studnička

O původu a rozvoji nauky o determinantech. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 2, 88--91

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121225

O původu a rozvoji nauky o determinantech.

Sepsal

Dr. F. J. Studnička.

(Pokračování.)

Podivuhodné jest, že práce Vandermonde-ovy a zejména jeho vtipná symbolika právě v nejbližších kruzích francouzských nedosáhly toho uznání, jakého zasluhují, ba že výteční mathematikové jako *Laplace* a *Lagrange*, kteří současně si získali značných zásluh o theorii determinantů, o nich ani se nezmiňují.

Jako předchůdcové jeho byl i Laplace veden k determinantním výrazům řešením rovnic lineárních,[1]) při čemž užil spůsobu Cramerova, jejž mimochodem též všeobecně odůvodnil; zároveň tu vyvinul pravidlo, jak se označují permutace hlavního členu podlé počtu převratů neb *variací,* jak je tu nazývá, při čemž však poznamenal, že Bézoutova methoda jest pro praksi výhodnější.

Dále ukázal, že výměnou dvou řad prvků, jak nyní pravíme, hodnota determinantu se nemění, nýbrž jen označení, takže značí-li R nějaký determinant aneb jak Laplace tento výraz nazývá, nějaký *resultant,* a R_k resultant z něho výměnou k řad povstávající, platí současně

$$\begin{aligned} R_1 &= -R, \\ R_2 &= -R_1 = R \\ R_3 &= -R_2 = R_1 = -R. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

z čehož soudí dále, že resultant stane se 0, jakmile dvě řady stanou se stejnými.

Poněvadž neměl pohodlného spůsobu, jakým by resultanty označoval, a Vandermonde-ova symbolika nejspíše mu byla neznáma, ač teprv rok před tím byla v témž sborníku uveřejněna, nemohl Laplace všeobecné vzorce podati, podlé nichž se řeší lineární rovnice, nýbrž vyjádřil jen slovy pravidlo Cramerovo

[1]) „Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde." Mém. de l'acad. r. année 1772, II. partie.

a ukázal, jak se ze společného jmenovatele zlomků, vyjadřujících hodnoty neznámých, vyvádí jednotliví čitatelové.

Tento nedostatek vhodného označování jeví se ještě více při vyšetřování spůsobu, jak se determinant dá vyjádřiti pomocí determinantů stupňů nižších, zejména jak se determinant stupně n-tého Δ_n dá rozložiti v součet součinů determinantů stupně p-tého Δ_p a $(n-p)$ tého Δ_{n-p}, jichž počet jest

$$m = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!},$$

a tudíž všeobecně platí

$$\Delta_n = \Sigma\,\Delta_p \,.\, \Delta_{n-p}\,,$$

což již Vandermonde znal, takže se musíme diviti důvtipu mathematickému, který přes tyto překážky se vyšinul i k pravidlu, které podnes jmenem „Laplaceova poučka" v nauce o determinantech se uvádí.[2])

Jak patrno, pohyboval se Laplace na půdě zcela všeobecné, takže jen litovati jest, že neznal našeho spůsobu, jakým označujeme determinanty; zajisté by se byl tento geniální mathematik, který v jiných oborech se dodělal tak skvělých výsledků, i v této nauce značněji vyznamenal.

V této příčině byl mnohem šťastnějším druhý veleduch, který tehdáž zářil na vědeckém obzoru francouzském, v Berlíně meškající *Lagrange* totiž, jehož vedlo vyšetřování rozmanitých poměrů trojbokého jehlance [3]) neb všeobecného čtyrstěnu k výrazům, jež nyní determinanty slují, a ke vzorcům, jež nyní co rozmanité poučky z nauky o determinantech vyplývají; vyvinulť tu na obyčejné cestě úplnou theorii determinantu stupně třetího.

Tím, že zavedl krátké označení pro subdeterminanty, mohl snadno vyjádřiti mnohé vlastnosti těchto determinantů neb vlastně výrazu, jehož tu užívá,

$$\begin{aligned}\Delta = {} & x y' z'' + y z' x'' + z x' y'' \\ & - x z' y'' - y x' z'' - z y' x'';\end{aligned}$$

[2]) Viz *Baltzer* „Theorie und Anwendung der Determinanten" IV. Aufl. pag. 34.

[3]) „Solutions analytiques de quelques problèmes sur le pyramides triangulaires." Nouv. Mém. de l'acad. r. de Berlin, année 1773. pag. 151. Srovnej *Studnička* „Geometrická upotřebení některých pouček o determinantech. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Roč. II.

podlé nynějšího spůsobu označování jest totiž

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

takže označíme-li subdeterminanty stupně prvního stejným znamením řeckým, jakž Lagrange činil, na př.

$$\xi = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad \xi' = \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y & z \end{vmatrix}, \quad \xi'' = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}.$$

Zde budiž jenom vytknuto, že znal rozklad determinantu Δ podlé prvků kterékoli řádky a věděl, kdy má hodnotu 0, jakž na př. z jeho vzorců

$$x\xi + x'\xi' + x''\xi'' = \Delta,$$
$$x\eta + x'\eta' + x''\eta'' = 0$$

a t. p. zřejmě jde na jevo; dále ukázal, že přidružený determinant, sestavený ze subdeterminantů těchto, rovná se druhé mocnině determinantu původního, že tedy podlé našeho spůsobu psaní

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}^2,$$

což jest jen zvláštní případ všeobecného pravidla, že přidružený determinant stupně n-tého Δ' rovná se $(n-1)$ní mocnině příslušného determinantu původního Δ, tedy

$$\Delta' = \Delta^{n-1};$$

konečně násobil i dva determinanty, což mu bylo provésti při lineární substituci veličin

$$y = Ms + Nx,$$
$$z = ms + nx$$

do kvadratického tvaru

$$f \equiv py^2 + 2qyz + rz^2,$$

čímž obdržel nový tvar

$$F \equiv Ps^2 + 2Qsx + Rx^2,$$

kdež značí

$$P = pM^2 + 2qMm + rm^2,$$
$$Q = pMN + q(Mn + Nm) + rmn,$$
$$R = pN^2 + 2qNn + rn^2$$

a podlé našeho způsobu psaní platí

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q \\ q & r \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} M & N \\ m & n \end{vmatrix}^2$$

a vyslovuje se pravidlem,[4]) že Hesse-ho determinant transformované funkce F, totiž

$$H = \begin{vmatrix} P & Q \\ Q & R \end{vmatrix},$$

liší se od Hesse-ho determinantu funkce původní f, totiž

$$H' = \begin{vmatrix} p & q \\ q & r \end{vmatrix}$$

jen čtvercem modulu substituce, kdež modulus jest

$$\mu = \begin{vmatrix} M & N \\ m & n \end{vmatrix}.$$

Jak patrno, sestavil tu Lagrange celou řadu vzorců, v nichž se jeví rozličné poučky z nynější nauky o determinantech a kteréž se na poli geometrickém tak skvěle osvědčily, že dlouho co *Lagrangeovy relace* byly uváděny a rozmnožovány, jakž na jiném místě jsem již poznamenal. [5])

Kdyby byl slavný tento mathematik, kterýž druhou polovici svého života trávil ve Francii, původní to vlasti jeho rodiny, neměl tak jednoduchou úlohu geometrickou před sebou, bylo by zajisté jeho relacím dostalo se všeobecnějšího významu a tím by se byly staly pravým základem nauky o determinantech.

(Dokončení.)

---

[4]) Viz *Salmon-Fiedler* „Algebra der linearen Transformationen“ pag. 99. a článek o *invariantech* pag. 124.

[5]) Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky. Roč. IV. pag. 49.