Václav Šimerka

Součty celých v lomené arithmetické posloupnosti. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 2, 82--87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121224

Součty celých v lomené arithmetické posloupnosti.

Sepsal

V. Šimerka.

(Dokončení.)

9.

Hledáme-li množství řešení u rov. v čl. 8. uvedených při obmezeném z, netřeba nám než výraz (6) překotiti a bude

$$\frac{n'}{m'} > \frac{r}{z} > \frac{n}{m} \text{ tedy i } \frac{n'z}{m'} > r > \frac{nz}{m};$$

nalezneme pak podobně

$$S = \sum_{1,\omega}^{z} E\frac{n'z-1}{m'} - \sum_{1,\omega}^{z} E\frac{nz}{m}.$$

Takť se u $x = 19r - 8z$, $y = -7r + 3z$ objeví

$$\frac{3z}{7} > r > \frac{8z}{19} \text{ při } \omega = 99,\ \sum_{1,99}^{z} E\frac{3z-1}{7} = 2065,$$

$$\sum_{1,99}^{z} E\frac{8z}{19} = 2037, \text{ tedy } S = 28.$$

10.

Dopatřme nyní k veličinám x, y hledajíce, při jakém obmezení konečný počet řešení obdržíme a jak se množství to určí. Z rovnic

$$x = mr - nz, \quad y = -m'r + n'z$$

jde, že jednou m s n a po druhé m' s n' čísla nesoudělná jsou; neboť jinak na př. u $m = m''\varphi$, $n = n''\varphi$ bude též x číslem φ dělitelné, tedy $x = x'\varphi$, a rovnice bude míti kratší podobu

$$x' = m''r - n''z,$$

kdež m'', n'' čísla nesoudělná jsou. Tomu-li tak, lze z

$$\alpha m - \beta n = 1$$

určiti celočíselné hodnoty α, β, a výrazy

$$r = nt + \alpha x, \quad z = mt + \beta x,$$

kdež t jakékoli celé číslo býti může, řeší, jak z dosazení seznati lze, rovnice

$$x = mr - nz.$$

Hodnoty r, z do $y = -m'r - n'z$ vzaty dávají napotom

$$y = (mn' - m'n)\,t + (\beta n' - \alpha m')\,x\,.$$

Uvedeme-li sem zkracovné rovnice

$$p = mn' - m'n\,,\quad q = \beta n' - \alpha m'$$

bude

$$y = pt + qx\,, \tag{8}$$

kdež za příčinou libovolného t čili následkem shody $y \equiv qx$, (mod p), vždy q kladným a menším než p učiniti lze.

Z toho následuje, že každé x dává nekonečné množství hodnot pro y, co též i naopak platí. Chceme-li tedy zde o konečném množství řešení mluviti, musíme nejen x, ale též y obmeziti.

11.

V rovnici (8) jsou p, q čísla nesoudělná.

Kdyby totiž jakousi společnou míru μ měly, jde z jejich hodnot tam uvedených

$$mn' \equiv m'n\,,\quad \beta n' \equiv \alpha m'$$

(mod μ). Násobíme-li poslední shodu rovnicí z předešlého článku

$$\alpha m = \beta n + 1\,,$$

bude

$$\alpha\beta mn' \equiv \alpha\beta m'n + \alpha m'$$

to jest

$$\alpha\beta\,(mn' - m'n) \equiv \alpha m' \equiv \alpha\beta p \equiv 0\,,$$

tak že by i $\alpha m' \equiv 0$, a proto též $\beta n' \equiv 0$ bylo.

To dává dále

$$0 \equiv \alpha m'n \equiv \alpha mn' \equiv (\beta n + 1)n' \equiv \beta nn' + n',$$

z čehož $n' \equiv 0$, a proto i $m'n \equiv 0$ jde.

Poněvadž m', n' nesoudělná čísla jsou, nemůže m' s μ co měrou čísla n' společného dělitele míti, čímž poslední shoda ve $n \equiv 0$ přechází. Podobně jde z $\alpha m \equiv 0$ též $\alpha \equiv 0$. Proto má-li μ čísla α, n děliti, nemůže za příčinou rovnice

$$\alpha m - \beta n = 1$$

býti leč $= 1$.

12.

Jak se nalezne množství řešení naduvedených rovnic, jsou-li u, ω potažně největší hodnoty čísel x, y?

Nejprvé jest dle rovnice

$$y = pt + qx$$

při libovolném $t = t' + q\varphi$ ze

$$y = pt' + q(p\varphi + x)$$

patrno, že $p\varphi + x$ tytéž hodnoty y dává co x, a protož nalezne se při

$$x = 1,\ 2,\ \dots p,$$

pak

$$x = p + 1,\ p + 2,\ \dots 2p$$

jakož vůbec u

$$p\varphi + 1,\ p\varphi + 2,\ \dots p(\varphi + 1)$$

vždy totéž množství y-nů.

Určí-li se napotom ψ ze shody $qx \equiv \psi \pmod p$ tak, aby $0 < \psi < p + 1$ bylo, to jest, aby pouze jedno z čísel 1, 2, 3, ... p obsahovalo, činí při každém ψ hodnoty y posloupnost ψ, $p + \psi$, $2p + \psi$, ... Není-li ω co největší hodnota y členem této řady, bude její poslední člen $< \omega$, a následující opět $> \omega$. Je-li ω členem oné řady, nalezneme množství jejich členů dle pravidel o arithmetické posloupnosti v tomto případě ze $\frac{p + \omega - \psi}{p}$. Není-li však ω mezi členy, bude množství ono největším celým číslem ve $\frac{p + \omega - \psi}{p}$ obsaženým, tedy $= E\frac{p + \omega - \psi}{p}$.

Beřeme-li však svrchu po sobě

$$x = 1,\ 2,\ 3 \dots p,$$

obdržíme při shodě $qx \equiv \psi$ (mod p) dle čl. 4. za ψ, ač v jiném pořádku, čísla 1, 2, ... p. Z té příčiny bude součet všech hodnot y při $x = 1, 2, \dots p$ roveň $\sum_{1,p}^{\psi} E\frac{p + \omega - \psi}{p}$, což dle (4) při

$$a = -1,\quad r = \psi,\quad b = p + \omega,\quad n = p$$

celkem $= \omega$ jest; jakž to i odtud poznati lze, že ku každému x jiné y, tedy ku všem těmto x všechny y patří.

Dle hořejška dává ale $p\varphi + x$ to samé množství y co x; protož máme-li

$$u = pv + \lambda,$$

bude hledané množství řešení $v\omega +$ počtu, jejž 1, 2, 3, ... λ za x dosazeno dává. Je-li nápotom při (mod p)

$$\psi \equiv q,\ 2q,\ 3q, \ldots \lambda q\,,$$

obdržíme při každé jednotlivé hodnotě ψ dle hořejška

$E\dfrac{p+\omega-\psi}{p}$ hodnot y.

To dává při $\omega = pv' + \lambda'$,

$$v' + E\frac{p+\lambda'-\psi}{p}\,;$$

protož bude součet při

$$x = pv + 1,\ pv + 2, \ldots pv + \lambda$$

čili při $x = 1, 2, \ldots \lambda$,

$$\lambda v' + \overset{\psi}{\Sigma}\, E\frac{p+\lambda'-\psi}{p}\,,$$

celkem tedy

$$S = v\omega + \lambda v' + \overset{\psi}{\Sigma}\, E\frac{p+\lambda'-\psi}{p}\,,$$

kdež se ovšem jednotlivé ψ z hořejší shody určí.

Takť dává

$$x = 6r - z,\quad y = -r + z\,;$$

pro rovnice

$$\alpha m - \beta n = 0,\quad \alpha = 0,\quad \beta = -1\,,$$

pak

$$p = mn' - m'n = 5\,,\quad q = \beta n' - \alpha m' = -1 \equiv 4 \text{ (mod. 5)}$$

tedy

$$y = st + 4x$$

a při

$$u = 17\,,\quad \omega = 23$$

protož u

$$v = 3,\quad \lambda = 2,\quad v' = 4,\quad \lambda' = 3\,,$$

objeví se

$$S = 69 + 8 + \overset{\psi}{\Sigma}\, E\frac{8-\psi}{5} = 78\,,$$

jelikož při $\lambda = 1$, 2 jest $\psi = 4$, 3.

13.

Rovnice

$$gx = mr - nz,\quad hy = -m'r + n'z \tag{9}$$

lze jakž svrchu v čl. 10. ohledně m, n naznačeno. upraviti tak, že v žádné ani dva součinitelové společné míry nemají. Zkrátíme-li napotom, pokud lze, $\frac{g}{h}$ tak že

$$\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'} \text{ tedy } gh' = g'h,$$

obdržíme

$$gh'x = h'mr - h'nz, \quad g'hy = -g'm'r + g'n'z.$$

Zde můžeme gh za shodovou míru vzíti, a bude

$$h'nz \equiv h'mr, \quad g'n'z \equiv g'm'r, \quad (\text{mod } gh').$$

Shody tyto dávají návodem v mé algebře čl. 114 (2hé vydání) uvedeným řešeny

$$z \equiv -\alpha r, \quad r \equiv -\beta z,$$

kdež $\alpha, \beta < gh'$ jsou.

Řešení takové jest vždy možné; neboť g', h' jsou čísla nesoudělná a n, n' nemají potažně s g, h společného dělitele. Z posledních shod jde pak

$$z = -\alpha r + gh'z', \quad r = gh'r' - \beta z.$$

Chtíce určiti počet řešení při obmezeném r, dosaďme hodnotu z do r. (9), a bude

$$x = \frac{m + \alpha n}{g} r - h'nz', \quad y = -\frac{m' + \alpha n'}{h} r + g'n'z',$$

kdež součinitelé celá čísla jsou. Podobně obdržíme pro obmezené z dosazením r

$$x = h'mr' - \frac{n + \beta m}{g} z, \quad y = -g'm'r' + \frac{n' + \beta m'}{h} z.$$

Množství řešení při obmezených x, y nalezne se napotom z kteréhokoli páru přeměněných rovnic. Na př.

$$7x = 6r - 5z, \quad 5y = -8r + 7z,$$

dává

$$35x = 30r - 25z, \quad 35y = -56r + 49z.$$

Z toho jdou shody

$$25z \equiv 30r, \quad 49z \equiv 56r, \quad (\text{mod } 35).$$

Vezmeme-li první shodu dvakrát a odejdeme od ní druhou, bude

$$z \equiv 4r \equiv -31r \quad \text{tedy} \quad z = -31r + 35z'.$$

Podobně dá $z \equiv 4r$ vzato 9krát

$$9z \equiv 36r \equiv -26z, \quad \text{čili} \quad r = 35r' - 26z.$$

Z toho jde jednou

$$x = 23r - 25z', \quad y = -45r + 49z',$$

a po druhé

$$x = 30r' - 23z, \quad y = -56r' + 43z.$$

Z předposledních rovnic jde napotom $\frac{23r}{25} > z' > \frac{45r}{49}$

při max. $r = \omega = 1225$

$$\sum_{1,\omega}^{r} E\frac{23r-1}{25} - \sum_{1,\omega}^{r} \Sigma\frac{45r}{49} = 690214 - 689025 = 1189.$$

14.

V předešlém jednalo se především o určení množství řešení v rovnicích

$$x = mr - nz, \quad y = -m'r + n'z;$$

chceme-li řešení sama, pokud lze, snadno a v pořádku nalez-nouti, docílíme toho výrazy

$$\alpha m - \beta n = 1, \quad p = mn' - m'n, \quad q \equiv \beta n' - \alpha m', \quad (\text{mod } p)$$

$$y = pt + qx, \quad r = \frac{n'x + ny}{p}, \quad z = \frac{m'x + my}{p}.$$

Z rovnice pro y určí se souvislost mezi x a y, a pokračuje se dle součtu z $x + y = s$.

Na př. u

$$x = 23r - 25z, \quad y = -45r + 49z$$

jest

$$\alpha = 12, \ \beta = 11, \ p = 2, \ q = 1,$$

tedy

$$y = 2t + x$$

tak že x, y spolu sudy neb lichy jsou, pak

$$r = \frac{1}{2}(49x + 25y), \quad z = \frac{1}{2}(45x + 23y)$$

Napotom se nalezne

s,	x,	y,	r,	z
2,	1,	1,	37,	34
4,	1,	3,	62,	57
4,	2,	2,	74,	68
4,	3,	1,	86,	79
6,	1,	5,	87,	80
6,	2,	4,	99,	91
6,	3,	3,	111,	102
6,	4,	2,	123,	113 atd.