Bedřich Pospíšil

Un théorème sur $n$ courbes simples dans le plan

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 64 (1935), No. 8, 293--297

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121219

# Un théorème sur $n$ courbes simples dans le plan.

RNC **Bedřich Pospíšil**, Brno.

(Reçu le 3 novembre 1934.)

Il s'agit d'un théorème énoncé par M. Čech et démontré par moi.

Le plan $R$ sera l'espace de nos considérations. Soit $F$ un ensemble fermé (dans $R$); soit $a$ un point de $R - F$; nous désignons par $g_a F$ la composante de $R - F$ qui contient le point $a$.

Soit $n$ un nombre naturel *fixe*;

$$\left.\begin{matrix} m \\ \mu \\ \nu \end{matrix}\right\} \text{ doit toujours parcourir les nombres } \left\{\begin{matrix} 1, 2, \ldots, n+1 \\ 2, 3, \ldots, n \\ 1, 2, \ldots, n. \end{matrix}\right.$$

Nous désignons par $(K; a)$ l'ensemble de tous les points que l'on peut joindre avec $a$ par un arc simple dont l'intérieur[1]) est disjoint de $K$.

Théorème:

Prémisse: *Soit $K$ un continu localement connexe situé dans le plan $R$; soient $a$ et $b$ deux points différents dans $R$; $B'$ étant un arc simple arbitraire dans $R$ aux extrémités $a$ et $b$, l'ensemble $B'K -$ $- (a) - (b)$ contient* (au moins) *$n$ points différents.*

Thèse: *$K$ contient* (au moins) *$n$ courbes simples $C_1, C_2, \ldots, C_n$ disjointes de $(a) + (b)$ et qui satisfont aux conditions suivantes:*

$$g_a C_\nu + C_\nu \subset g_a C_{\nu+1},^{3)} \; b \in R - g_a C_\nu. \tag{1}$$

Démonstration: Pour $n = 1$, notre théorème est dû à M. Cleveland[2]); nous n'y reviendrons plus.

Supposons donc que le théorème soit vrai pour une certaine valeur de $n \geqq 1$; supposons la prémisse de ce théorème satisfaite, si l'on y écrit $n + 1$ au lieu de $n$. Il faut démontrer que la thèse reste vraie si l'on y met $n + 1$ au lieu de $n$.

[1]) $B'$ étant un arc simple, $x$ et $y$ ses extrémités, $B' - (x) - (y)$ est (par déf.) l'intérieur de $B'$.

[2]) Voir Moore: Found. of point set theory, p. 242.

[3]) On supprime la relation avec $C_{n+1}, C_{n+1}{}^a, C_{n+1}, C'_{n+2}$ qui n'a pas de sens.

Le théorème étant supposé vrai pour la valeur $n$, $K$ contient $n$ courbes simples

$$C_1, C_2, \ldots, C_n,$$

jouissantes des propriétés énoncées dans la thèse du théorème.

Soit $\alpha \in C_1 (K; a)$; $B''$ étant un arc simple arbitraire aux extrémités $\alpha$ et $b$, $B''K - (\alpha) - (b)$ contient (au moins) $n$ points; il existe alors $n$ courbes simples $C_\nu^a \subset K$ disjointes de $(\alpha) + (b)$ et pour lesquelles on a

$$g_a C_\nu^a + C_\nu^a \subset g_a C_{\nu+1}^a,^{3)} \ b \in R - g_a C_\nu^a.$$

Soit $\beta \in [R - (K; a)]\, C_1$; alors $K$ contient une courbe simple $C_1^\beta$ disjointe de $(a) + (\beta)$ et telle que

$$g_a C_1^\beta \,.\, g_\beta C_1^\beta = 0.$$

Aucun arc simple aux extrémités $a$ et $\beta$ n'est disjoint de $C_1^\beta$, d'où l'on tire que la courbe $C_1^\beta$ ne peut pas être située dans $R - (g_a C_1 + C_1)$; nous désignons encore

$$C_\mu = C_\mu^\beta.$$

A chaque point $c$ de $C_1$ nous avons ainsi fait correspondre une série finie de courbes simples $C_1^c, C_2^c, \ldots, C_n^c$ assujettie aux conditions suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} g_c C_\mu^c + C_\mu^c \subset g_c C_{\mu+1}^{c\,3)} \text{ pour chaque } c \in C_1 \\ a \in R - g_c C_1^c, \text{ si } c \in [R - (K; a)]\, C_1 \\ b \in R - g_c C_1^c, \text{ si } c \in (K; a)\, C_1 \\ b \in R - g_c C_\mu^c \text{ pour chaque } c \in C_1. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Pour chaque $\nu$, on a

$$C_1 \subset \sum_{c \in C_1} g_c C_\nu^c.$$

La courbe $C_1$ étant compacte, la dernière relation reste valable même quand le point $c$ ne parcourt qu'un certain sous-ensemble *fini* $\Gamma_\nu$ de la courbe $C_1$;

posons

$$\Gamma = \sum_\nu \Gamma_\nu.$$

Alors, $\Gamma$ est un sous-ensemble *fini* de la courbe $C_1$ vérifiant *pour chaque* $\nu$ la relation suivante:

$$C_1 \subset \sum_{c \in \Gamma} g_c C_\nu^c. \qquad (3)$$

Posons

$$A = (K; a)\, \Gamma, \ B = [R - (K; a)]\, \Gamma;$$

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= g_b C_1 + \sum_{\beta \in B} g_\beta C_1{}^\beta, \\ G_2 &= g_a C_1 + \sum_{\alpha \in A} g_a C_1{}^a \\ G_{\mu+1} &= g_a C_1 + \sum_{c \in \Gamma} g_c C_\mu{}^c \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} FrG_1 &\subset C_1 + \sum_{\beta \in B} C_1{}^\beta = F_1 \\ FrG_2 &\subset C_1 + \sum_{\alpha \in A} C_1{}^a = F_2 \\ FrG_{\mu+1} &\subset C_1 + \sum_{c \in \Gamma} C_\mu{}^c = F_{\mu+1}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

où $FrG_m$ désigne la frontière de l'ensemble $G_m$.

En vertu de (2), (4), (5), les ensembles $FrG_m$ coupent le plan entre les deux points $a$ et $b$; ils contiennent des coupures irréductibles entre $a$ et $b$ — nous désignons celles-ci par $H_m$; chaque $H_m$ étant connexe, on a $H_m \subset K_m$, où $K_m$ est une composante de l'ensemble $F_m$; $K_m$ est un continu localement connexe (puisque c'est une somme d'un nombre fini de courbes simples); $K_m$ coupe le plan entre les points $a$ et $b$.

Posons

$$g_b K_1 = gK_1, \; g_a K_{\nu+1} = gK_{\nu+1}.$$

L'ensemble $FrgK_m$ pour chaque $m$ est un continu localement connexe[4]) qui coupe le plan entre $a$ et $b$. Chaque $FrgK_m$ contient alors une courbe simple $C'_m$ qui coupe le plan entre $a$ et $b$ (en vertu du théorème de M. Cleveland); on a

$$b \in R - g_a C'_m. \tag{6}$$

De la relation $G_m \subset gK_m$, on tire

$$g_b C'_1 \supset G_1, \; g_a C'_{\nu+1} \supset G_{\nu+1}. \tag{7}$$

Soit $\gamma \in C_1 C'_1$; en vertu de (3), il existe un $c \in C_1$ tel que $\gamma \in g_c C_1{}^c$; on a $c \in \Gamma = A + B$; supposons que $c$ soit un point de l'ensemble $B$; de la définition (4) de $G_1$, on tire que $\gamma \in G_1 \subset R - C'_1$ (puisque $C'_1 \subset FrG_1$), ce qui est une contradiction. On a alors $c \in A$; la définition (4) de $G_2$ donne immédiatement $\gamma \in G_2$. Nous avons ainsi obtenu la relation

$$C_1 C'_1 \subset G_2. \tag{8}$$

On a

$$C'_1 \cdot g_b C_1 \subset C'_1 G_1 = 0$$

---

[4]) Voir Moore: Found. of point set theory, p. 212.

d'où l'on tire

$$C'_1 \subset C'_1 (C_1 + g_a C_1);$$

il s'en suit (en vertu de (8)):

$$C'_1 \subset G_2 + g_a C_1 = G_2 \subset g_a C'_2. \tag{9}$$

La relation (4) pour $\mu = 2$ implique que

$$C_1 \subset G_3 \text{ c. à d.}$$
$$C'_2 C_1 \subset G_3;$$

en outre, on a

$$C'_2 \sum_{\alpha \in A} C_1^{\alpha} \subset \sum_{\alpha \in A} C_1^{\alpha} \subset \sum_{\alpha \in A} g_a C_2^{\alpha} \subset \sum_{c \in \Gamma} g_c C_2^{c} \subset G_3 \subset g_a C'_3,$$

ce qui donne

$$C'_2 \subset g_a C'_3 \tag{10}$$

puisque

$$C'_2 \subset Fr G_2 \subset F_2.$$

De la même manière, de la relation (3), on en peut conclure que ($\mu > 2$)

$$C'_{\mu} \subset \sum_{c \in \Gamma} C_{\mu-1}^{c} \text{ (voir (2), (4), (5))};$$

il s'en suit

$$C'_{\mu} \subset G_{\mu+1} \subset g_a C'_{\mu+1}, \tag{11}$$

puisque les relations (2), (4), (5) donnent

$$C_{\mu-1}^{c} \subset G_{\mu+1}.$$

Les relations (9), (10), (11) entraînent

$$C'_{\nu} \subset g_a C'_{\nu+1} \text{ (pour chaque } \nu). \tag{12}$$

Supposons qu'un point $x$ soit situé dans l'ensemble $g_a C'_{\nu} \cdot [R - g_a C'_{\nu+1}]$. Il existe dans $g_a C'_{\nu}$ un arc simple $B_1$ aux extrémités $a$ et $x$; pareillement, il existe dans

$$R - (g_a C'_{\nu+1} + C'_{\nu+1}) + (x)$$

un arc simple $B_2$ aux extrémités $b$ et $x$; $B_2$ est disjoint de $C'_{\nu}$ — en vertu de (12). L'ensemble $B_1 + B_2$ — disjoint de $C'_{\nu}$ — contient un arc simple aux extrémités $a$ et $b$ disjoint de $C'_{\nu}$ ce qui est impossible puisque $C'_{\nu}$ coupe le plan entre $a$ et $b$ (voir (6)).

On a alors

$$g_a C'_m + C'_m \subset g_a C'_{m+1},^{3)} \; b \in R - g_a C'_m; \tag{1'}$$

les courbes $C'_1, C'_2, \ldots, C'_{n+1}$ satisfont alors aux conditions désirées. Notre théorème est ainsi démontré.

*

## Věta o $n$ jednoduchých křivkách v rovině.

(Obsah předchozího článku.)

V předchozím článku dokazuji tuto větu:

Předpoklad: Buď $K$ lokálně souvislé kontinuum v rovině $R$, $a$ a $b$ dva různé body v $R$; každý jednoduchý oblouk o koncových bodech $a$ a $b$ protíná $K$ aspoň v $n$ různých bodech mimo $a$ a $b$.

Tvrzení: $K$ obsahuje $n$ jednoduchých disjunktních křivek, které oddělují body $a$ a $b$ v $R$.