Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bedřich Pospíšil

Principe général pour déduire les équations fondamentales de la physique

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 8, 303--310

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121217

Principe général pour déduire les équations fondamentales de la physique.

RNC **Bedřich Pospíšil,** Brno.

(Reçu le 26 avril 1934.)

Notre théorie sera basée sur la notion de *probabilité.* Nous en déduirons tous les principes fondamentaux de la physique (les éq. de Lagrange et de Maxwell, les quanta etc.). Nous réussirons à interpréter les ondes de Broglie et à harmoniser le point de vue quantique et celui basé sur la continuité.

I.

1. *Probabilité.* Soit X un ensemble (non ordonné); soit Z un espace (topologique) dont les points sont quelques uns des sous-ensembles s de X ordonnés de manière que chacun d'eux ait un premier et un dernier élément. Désignons par $\Sigma^* s$ la somme d'un nombre fini des s (prise au sens de la somme des ensembles ordonnés et) telle que le premier élément de chaque s dans $\Sigma^* s$ (excepté le premier s) est égal au dernier élément de l'ensemble qui le précède immédiatement; cet élément n'entre qu'une fois dans la somme $\Sigma^* s$; excepté ce cas, tous les s dans $\Sigma^* s$ sont supposés disjoints.

Soit $p(s)$ une fonction définie sur Z, univoque et dont les valeurs sont les nombres complexes, assujettie aux axiomes suivants:

(*a*) $| p(s) | \leqq 1$,
(*b*) $p(\Sigma^* s) = \Pi\, p(s)$,
(*c*) $\log p(s)$ est une fonction continue de s.

Nous définissons:

1. $p(s)$ est la *probabilité* de s.

2. Soit $p(s_0) = 1$ et $p(s) \neq 1$ pour chaque s aux extrémités communes avec s_0 et appartenant à un entourage E (dans Z) de s_0; dans ces hypothèses, la probabilité de s_0 est dite *certitude.*

Nous n'allons discuter qu'un *cas spécial*:

Soit X l'espace euclidien à quatre dimensions, x_i la i-ième coordonnée d'un point de X; soit Z l'espace de courbes s sans points doubles; ces courbes soient définies par des équations du type

$$x_i = x_i(x_4),$$

où $x_i(x_4)$ sont des fonctions (univoques) ayant les deuxièmes dérivées.

Un *entourage* (dans l'espace Z) d'une courbe s_0 est *(par déf.)* un ensemble de courbes s telles que les fonctions $x_i(x_4)$ qui les définissent, resp. leurs premières dérivées, diffèrent peu des fonctions correspondantes qui définissent s_0, resp. de leurs premières dérivées pour tous les x_4 considérés.

Si l'on désigne par s aussi la longueur de l'arc de la courbe s, on a

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 + \mathrm{d}x_4^2};$$

des deux racines, nous en élirons celle dont la partie réelle n'est pas négative.

Posons

$$\omega = \log p;$$

soit

$$s = \sum_k {}^* s_k \; (k = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après (b), on a

$$\omega(s) = \sum_k \omega(s_k) \to \int_s \mathrm{d}\omega, \text{ si } n \to \infty, s_k \to 0;$$

$\omega(s)$ ne dépendant pas de n, on a alors

$$\omega(s) = \int_s \mathrm{d}\omega.$$

Nous cherchons à déterminer $p(s)$ plus précisément. A ce but, faisons la suppose (la plus simple):

u étant un point variable de s, posons

$$\mathrm{d}\omega = f(u)\,\mathrm{d}s$$

avec $f(u)$ univoque et (pour plus de clarté) continue.

On peut interpréter l'espace X comme il suit:

$x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ sont les coordonnées de l'espace euclidien „empirique“ à trois dimensions, $x_4 = ict$, où t désigne le „temps“, c étant constant; $p(s)$ est la probabilité du mouvement d'un „point matériel“ de la manière indiquée par la courbe s.

Cherchons à trouver la formule pour $p(s)$:

Considérons d'abord le cas où $p(s)$ est invariant par rapport aux mouvements de la courbe s dans l'espace X. A l'aide des mouvements convenables, des arcs de nos courbes arbitraires, on en peut construire une nouvelle courbe du même type.

On a alors

$$f(u) = f = \text{const.}$$

A cause de (a), la constante f est négative; alors, on peut écrire

$$d\omega = -\frac{2\pi}{h} m_0 c\, ds,$$

où h et m_0 sont des constantes positives; soit

$$c^2\beta^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Nous voulons discuter le cas des x, y, z, t, m réels ($\beta^2 < 1$); on trouve immédiatement

$$p(s) = \exp \frac{2\pi i}{h} \int_s \sum_\alpha p_\alpha\, d\alpha \quad (\alpha = x, y, z, t)$$

où

$$p_x = m\frac{dx}{dt},\ p_y = m\frac{dy}{dt},\ p_z = m\frac{dz}{dt},\ p_t = -mc^2.$$

Dans le cas plus général, écrivons

$$p(s) = \exp \frac{2\pi i}{h} P(s),$$

où

$$P(s) = \int_s \sum_\alpha P_\alpha\, d\alpha \quad (\alpha = x, y, z, t)$$

avec

$$P_\alpha = p_\alpha + \varphi_\alpha.$$

Les φ_α soient les fonctions réelles des x, y, z, t ayant les deuxièmes dérivées partielles et telles que les axiomes ne cessent pas à être vérifiés; supposons encore

$$\frac{\partial^2}{\partial\varkappa\,\partial\lambda}\varphi_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\varkappa}\varphi_\alpha$$
$$(\alpha, \varkappa, \lambda = x, y, z, t).$$

2. *Définitions; les équations de Lagrange.* Posons

$\frac{d}{dt}(x, y, z) = \mathbf{v}$ *(vitesse)*

$c\,(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = \mathbf{a}$ *(potentiel vecteur)*

$-\varphi_t = \varphi$ *(potentiel scalaire)*

$\operatorname{div} \mathbf{a} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = K$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_x, p_y, p_z) = \mathbf{F} \text{ (force mécanique)}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{a} - \operatorname{grad}\varphi = \mathbf{D} \text{ (force électrique)}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{H} \text{ (force magnétique)}$$

$$-c(\Box\,\mathbf{a} - \operatorname{grad} K) = \mathbf{j} \text{ (densité du courant)}$$

$$-\left(\Box\,\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial K}{\partial t}\right) = \varrho \text{ (densité de la masse él.)}.$$

Soit E un entourage de la courbe s_0[1]) dans Z; soit G le produit (Durchschnitt) de E avec l'ensemble de courbes s[1]) aux extrémités communes avec s_0. On démontre sans peine que G peut être supposé connexe — même quand on en enlève la courbe s_0; puisque $P(s)$ est réel dans G,[1]) les valeur de $P(s)$, où s est un élément de G, forment un intervalle (d'après (c)).

Soit $p(s_0)$ une certitude:

On peut supposer que E ait la propriété exigée dans la définition 2. Alors, avec s_0, on enlève aussi $P(s_0)$ ce qui ne rompt pas la connexité de l'intervalle considéré, c. à d. $P(s_0)$ est une extrémité de ce dernier, ce qui nous mène à l'équation fondamentale de la mécanique

$$\delta P = 0. \tag{I}$$

C'est une condition *nécessaire* pour la certitude; elle est aussi *suffisante*, si elle donne un extrême même pour les arcs s_0, pour lesquels

$$\int_{s_0} \mathrm{d}P = \pm h \qquad \text{(voir 2).}$$

Pour nos courbes, la probabilité est égale à ± 1 ou elle n'est pas réelle (ce qui n'est rien d'étonnant puisque nos courbes elles-mêmes sont imaginaires, car $x_4 = ict$). Sur la courbe s_0, si l'on laisse varier la seconde extrémité, on n'a $p = 1$ que si

$$P = nh \quad (n \text{ entier}) \tag{II}$$

ce qui quantifie la courbe s_0 dans l'espace X.

Ajoutons encore les identités faciles à vérifier:

$$\begin{aligned} c\,.\operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{j} \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= \varrho \end{aligned} \tag{III}$$

$$\begin{aligned} -c\,.\operatorname{rot}\mathbf{D} &= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H} \\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \tag{IV}$$

---

[1]) Nous ne considérons que les courbes qui ont les propriétés que nous leur avons imposées au paragraphe précédent.

Ce sont les équations de **Maxwell**. On vérifie sans peine que l'équation $\delta P = 0$ équivaut à la suivante:

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{vH}]. \tag{V}$$

3. *Les quanta*. Posons

$$\mathrm{d}P = \sum_r P_r\,\mathrm{d}q_r;$$

l doit parcourir toujours une combinaison fixe d'indices r. Considérons une de nos courbes C dont la projection $C(l)$ dans l'espace (l) des coordonnées q_l est fermée même quant aux quantités P_l supposées exprimables comme fonctions d'un point variable dans l'espace (l).

La courbe C soit assujettie à la condition suivante:

p est univoque à chaque point de C, c. à d. p ne change pas, si l'on gagne le même point après avoir parcouru un cycle de $C(l)$.

On en tire la condition quantique

$$\int \sum_l P_l\,\mathrm{d}q_l = nh \quad (n \text{ entier}), \tag{VI}$$

l'intégrale prise sur un cycle de $C(l)$. La formule (VI) reste valable même quand $C(l)$ n'est que périodique (même quant aux P_l) — on identifie les points qui ne diffèrent que de la période.

Si $P_t = W$ avec un W constant, on a

$$p = \exp 2\pi i\,(\nu t + \varepsilon)$$

avec

$$W = h\nu \tag{VII}$$

ce qui nous mène à chercher le rapport aux ondes de **Broglie**:

On vérifie aisément l'identité (de **Jacobi**)

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \varphi_t\right)^2 - \sum_\mu \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} - \varphi_\mu\right)^2 = m_0{}^2 c^2 \; (\mu = x, y, z).$$

Posons

$$\frac{2\pi i}{h} = k$$

et cherchons à mettre p au lieu de P dans l'équation de **Jacobi**

Si h est petit, on a *en approximation*[2])

$$\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\varphi_t\right)^2 - \sum_\mu \left(\frac{\partial}{\partial \mu} - k\varphi_\mu\right)^2 - k^2 m_0{}^2 c^2\right\} p = 0 \tag{VIII}$$

ce qui n'est que l'équation de **Broglie**.

---

[2]) $\dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = kp\dfrac{\partial P}{\partial \alpha}$, $\dfrac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} = kp\left\{k\left(\dfrac{\partial P}{\partial \alpha}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2}\right\} \doteq k^2 p\left(\dfrac{\partial P}{\partial \alpha}\right)^2.$

Soient σ_α les matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Posons

$$M' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \varphi_t\right) - \sum_\mu \sigma_\mu \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} - \varphi_\mu\right)$$

$$N' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \varphi_t\right) + \sum_\mu \sigma_\mu \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} - \varphi_\mu\right).$$

L'équation de Jacobi peut s'écrire

$$M'N' - m_0{}^2c^2 = 0$$

ou autrement

$$\lambda_1 M' - \lambda_2 m_0 c = 0$$
$$\lambda_2 N' - \lambda_1 m_0 c = 0.$$

Si l'on y met p au lieu de P, on a *précisément*[2])

$$\begin{aligned}(\lambda_1 M - \lambda_2 k m_0 c)\, p &= 0 \\ (\lambda_2 N - \lambda_1 k m_0 c)\, p &= 0\end{aligned} \qquad \text{(IX)}$$

où

$$M = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\varphi_t\right) - \sum_\mu \sigma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial \mu} - k\varphi_\mu\right),$$

$$N = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\varphi_t\right) + \sum_\mu \sigma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial \mu} - k\varphi_\mu\right)$$

en accord avec Dirac.

4. *Transformation de l'espace.* Quelquefois, il est commode de changer la définition de la distance dans l'espace X qui devient ainsi non-euclidien; dP sera l'élément de la nouvelle distance. La condition nécessaire et suffisante pourque l'équation $p = 1$ soit vérifiée pour chaque point de la courbe s_0 est la suivante

$$\mathrm{d}P = 0 \qquad \text{(X)}$$

ce qui n'est que l'équation d'Einstein de la propagation de la lumière.

La condition $\delta P = 0$ (voir (I)) détermine la ligne géodésique qui donne le mouvement du point matériel conformément à la Relativité.

Par la métrique que nous venons de définir, nous nous sommes débarrassés de tous les potentiels; nous nous en sevirons tout de suite.

Toute la théorie précédente pourrait être appliquée même sur un *système* matériel, si l'on considérait l'espace X dont les coordonnées sont celles de notre système (le temps inclusivement).

II.

Applications à la statistique.

Considérons un ensemble (L) dont les éléments sont les sous-ensembles (non-ordonnés) L de l'ensemble X.

Soit $w(L)$ une fonction de L — dite *probabilité* — assujettie aux axiomes suivants[3]):

$$w(L) \geqq 0, \tag{α}$$

$$w(\Sigma L) = \Sigma\, w(L) \tag{β}$$

où ΣL est une somme d'un nombre fini d'ensembles L disjoints,

$$w(X) = 1. \tag{γ}$$

La métrique que nous avons acquise au paragraphe précédent est convenable pour notre espace X: il n'y a plus de fonctions φ_a qui font dépendre les propriétés de l'espace de la position (si l'on définit la position comme il suit: Deux ensembles congruents — c. à d. isométriques — non identiques ne diffèrent que par la position). Si X est un espace, la probabilité $w(L)$ est proportionnelle au volume de L (d'après (β)).

La métrique de notre espace X soit définie par le tenseur g_{ik}; posons $g = |\, g_{ik} \,|$.

Pour deux métriques différentes (1 et 2) du même ensemble de points, on connaît la relation

$$\sqrt{g_1} \,.\, \mathrm{d}V_1 = \sqrt{g_2} \,.\, \mathrm{d}V_2$$

où $\mathrm{d}V_j$ sont les éléments du volume.

Les quantités avec l'indice O (sans indice) appartiendront à l'espace X muni de la métrique donnée par l'élément $\mathrm{d}P(\mathrm{d}s)$.

On a

$$\mathrm{d}V = \sqrt{g_0}\, \mathrm{d}V_0.\text{[4])}$$

Posons

$$-\log \sqrt{g_0} = S.$$

La probabilité w étant proportionnelle au volume V_0, on a

$$\mathrm{d}w = A e^S \mathrm{d}V. \tag{XI}$$

L'espace X soit interprété comme l'extension en phases d'un système; les deux systèmes Σ' et Σ'' soient dits *indépendants*, si la métrique de l'extension en phases du système Σ composé des deux systèmes Σ' et Σ'' est donnée par la matrice[5])

---

[3]) Voir Kolmogoroff: „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung".

[4]) Dans les applications concrètes, on *a* $\mathrm{d}t \doteq \mathrm{d}t_0$; V_j peut alors être interprété comme le volume à *trois* dimensions ($j = 1, 2$).

[5]) La *dimension* de nos extensions peut être *arbitraire*.

On a

$$\begin{Vmatrix} g'_{11} \dots g'_{1r} & 0 \dots 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ g'_{r1} \dots g'_{rr} & 0 \dots 0 \\ 0 \quad \dots 0 & g''_{11} \cdot g''_{1s} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \\ 0 \quad \dots 0 & g''_{s1} \cdot g''_{ss} \end{Vmatrix}$$

$$g_0 = g'_0 g''_0,$$

alors

$$S = S' + S''.$$

La fonction S peut être dite „*entropie*"; elle est *additive* pour les systèmes *indépendants.*

La constante A se détermine d'après l'axiome (γ).

*

Obecný princip k odvození základních rovnic fysiky.

(Obsah předcházejícího článku.)

Pohyb hmotného bodu znázorňujeme křivkou v časoprostorovém čtyřrozměrnu. Axiomy (a), (b), (c) definujeme t. zv. *pravděpodobnost* takové křivky; její diskusí dostaneme tyto výsledky:

Podmínka pro „jistotu" dá základní rovnici mechaniky (I); Maxwellovy rovnice (III) a (IV) vyjdou jako identity vzhledem k definicím paragrafu 2. Pro křivku uzavřenou vzhledem k některým souřadnicím žádáme jednoznačnost pravděpodobnosti; dostaneme podmínky stability. Ze snadno verifikovatelné rovnice Jacobiovy plyne pro naši pravděpodobnost rovnice Brogliova, přibližně a přesně pak rovnice Diracovy. Vhodnou transformací souřadnic lze odstranit potenciály; v prostoru beze sil je pravděpodobnost výskytu bodu v nějaké části prostoru úměrna jejímu objemu — tím máme dánu možnost vyšetřovat pravděpodobnost výskytu při libovolných silách, což činíme v části II.